

Aufgabe 1: Partielle Ableitungen

Leiten Sie die folgenden Funktionen nach den jeweils angegebenen Variablen ab:

- (a) $\frac{\partial}{\partial x} (2x^2 + 7xy + z)$ (d) $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \ln(x + y + z)$
(b) $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ (e) $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \arctan \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right]$
(c) $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 3xy^2 + zy)$

Aufgabe 2: Laplace-Gleichung

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ die Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

für $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)^T$ erfüllt.

Aufgabe 3: Totale Ableitung

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ mit $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$ mit $\rho \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die totale Ableitung $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))$ mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 4: Gradient

Gegeben sei eine Funktion $f(x, y, z)$ (Skalarfeld). Der Gradienten(-vektor) von f ist

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ Nabla-Operator genannt wird.

Berechnen Sie die Gradienten $\vec{\nabla} f$ für folgende Felder:

- (a) $f(x, y, z) = x + y^2 + z^2$ (c) $f(x, y, z) = y^2 \sin(x) - \sqrt{yzx^2}$
(b) $f(x, y, z) = e^x z^3 - yzx^2$ (d) $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + 10$

Bonus Aufgabe 5: Mehrfachintegrale

- (a) $\int_0^1 dx \int_0^2 dy (3x^2 y^3 + 2)$ (c) $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz (x^2 y - z^2 x + 3y^2 z)$
(b) $\int_0^\pi dx \int_0^1 dy \sin(x) y^2$ (d) $\int_0^{yz} dx \int_0^{z^2} dy \int_0^1 dz (x^2 - z^2 + yz)$