TAYLOR ENTWICKLUNG + REGELN VON L'HOPITAL

TAYLORREIHEN

- Reihendarstellung von $\operatorname{Exp} x$, $\sin x$, $\cos x$
- Systematische Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

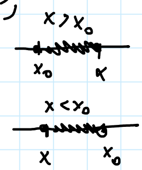
TAYLORENTWICKLUNG

Theorem. Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x_0 \in I$ und $x \in I$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

wo für das Rest gilt: $\exists\, \xi$ zwischen x_0 und x ($\xi \in [x_0, x]$ für $x > x_0$ oder $\xi \in [x, x_0]$ für $x < x_0$), so dass

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$



Interval

BEMERKUNG: Dies ist eine Existenzaussage, ξ schwer zu finden.

- In der Praxis verwendet man die erste n-Terme, um eine Funktion zu approximieren und vernachlässigt das Restglied (Fehler)

BEISPIELE

$f(x) = \cos x$ und $x_0 = 0$

$$\cos x = \cos(0) - \cancel{\frac{\sin(0)}{1}(x-0)} - \frac{\cos(0)\cdot(x-0)^2}{2} + \cancel{\frac{\sin(0)}{6}(x-0)^3} + \frac{\cos(0)\,(x-0)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$

$$f(x) = \cos(x\cdot e^x) + \sin(x^2\cdot e^{-x}) \quad \text{in } x_0 = 0$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - 2x^3 - \frac{11}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + \dots$$

TAYLORREIHEN

Definition: Sei nun $f: I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Wir definieren die Taylorreihe einer Funktion f um dem Entwicklungspunkt x_0:

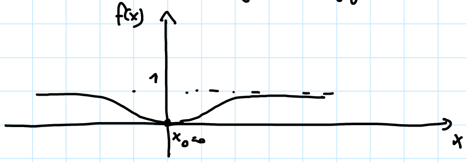
$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- Falls die Taylorreihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f.

- Falls die Taylorreihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f.

BEISPIEL: ZUM PUNKT

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$\exp \equiv e$

$e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$f^{(m)}(0) = 0$$

Taylorreihe ist die Null Reihe, aber f ist nicht identisch Null in der Nähe von x_0

DIE REGELN VON L'HOPITAL

Erlauben den Grenzwert von Funktionen selbst dann noch zu bestimmen, bei unbestimmte Ausdrücke

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \frac{0}{0},\ \pm\frac{\infty}{\infty},\ \pm 0 \cdot \infty$$

THEOREM $\left[\frac{0}{0}\right]$ Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ zwei im $x_0 \in D$ stetige Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Weiter seien f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar.

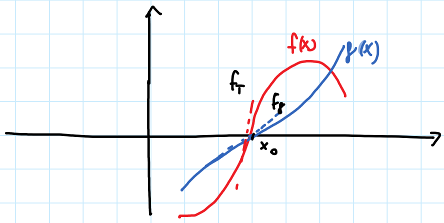
Existiert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

BEISPIEL

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \underset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} \underset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

ANSCHAULICHE ERKLÄRUNG



Tangente $f_T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$g_T(x) = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

$x \to x_0$

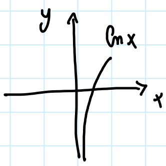
$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f_T(x)}{g_T(x)} = \frac{f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}{g'(x_0)(x-x_0) + g(x_0)} = \frac{f'(x_0)\cancel{(x-x_0)}}{g'(x_0)\cancel{(x-x_0)}} \longrightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

DIE ZWEITE REGEL VON L'HOPITAL

Theorem. $\left[\frac{\pm\infty}{\infty}\right]$ Ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ und existiert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

so gilt ebenfalls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$



BEISPIEL

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$$

$$\underset{L'H}{=} \lim \frac{\frac{1}{x}}{\ldots} \ldots \lim -\frac{1}{\ldots} x^2 \ldots \lim -x = 0$$

$$\frac{\cdot}{x} \quad \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\cancel{x}} \cdot x^{\cancel{2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

QUIZ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-4}{x^2+6x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2x+6} = 0$$

A) 0
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{3}{2}$
D) 3

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+5x^2-3x-1}{x^3-20x^2+x+10} =$$

A) 0
B) $-\frac{1}{10}$
C) 7
D) 21

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} =$$

A) 0
B) ∞
C) $-\infty$
D) 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin x} \underset{L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{\cos x} = 4$$

A) 0
B) ∞
C) 5
D) 4

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln x)\, x^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{2} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x^2 = 0$$

A) 1

x^2

A) 1

B) $-\infty$

C) $+\infty$

D) 0

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2$$

$$f(x) = \ln x$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$
$$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$