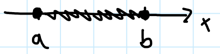
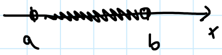
Freitag, 4. April 2025 10:45

INTEGRAL RECHNUNG

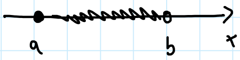
Intervalle $[a,b]$



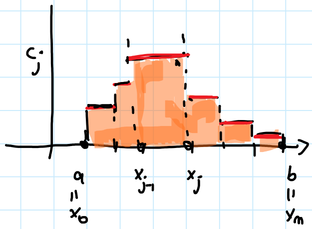
"offen" $]a,b[$



$[a,b[$



TREPPENFUNKTIONEN



Definition: Man nennt $t:[a,b]\to\mathbb{R}$ TREPPENFUNKTION, falls es eine Unterteilung
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$
gibt, so dass t auf jedem offenen Interval $]x_{j-1}, x_j[$ constant ist.
Der Wert auf diesem Intervall sei mit c_j bezeichnet.

Definition: Das INTEGRAL EINER TREPPENFUNKTION wird definiert als

$$\int_a^b t(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot (x_j - x_{j-1})$$

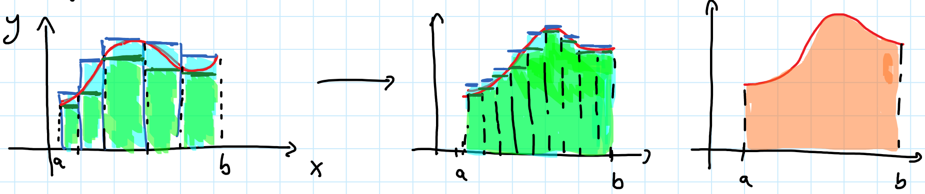
OBER- UND UNTERINTEGRALE

Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ bilden einen Vektorraum, der mit $T[a,b]$ bezeichnet ist.

Definition Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion und $t\in T[a,b]$. Wir definieren

$$\int_a^{b^*} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b t(x)\,dx \,;\ t\in T[a,b],\ t\geq f\right\}$$ OBER INTEGRAL $\inf \equiv$ infimum = Unterste der Menge

$$\int_{a^*}^{b} f(x)\,dx = \sup\left\{\int_a^b t(x)\,dx \,;\ t\in T[a,b],\ t\leq f\right\}$$ UNTER INTEGRAL $\sup$ = supremum = Oberste der Menge



DAS RIEMANN INTEGRAL

Definition: Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, falls

$$\int_a^{b^*} f(x)\,dx = \int_{a^*}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

SÄTZE ÜBER INTEGRIERBARE FUNKTIONEN

Theorem: Jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist integrierbar

Theorem: Jede monotone Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist integrierbar

Theorem: Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda\in\mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $f+g$ und λf

integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

$(f \cdot g)(x)$ integrierbar!, aber

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

STAMMFUNKTIONEN

Definition: Eine differenzierbare Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ heißt STAMMFUNKTION einer Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, falls $F'(x) = f(x)$

Eine weitere Funktion $G: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann ebenfalls eine Stammfunktion, falls $F-G$ eine Konstante ist.

Man schreibt auch $F(x) = \int f(x)\,dx$ UNBESTIMMTES INTEGRAL

THEOREM Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

STAMMFUNKTIONEN EINIGER GRUNDFUNKTIONEN

$f(x) = x^m \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ $\quad m \neq -1 \qquad F'(x) = \dfrac{1}{\cancel{m+1}} \cancel{(m+1)}\, x^m = x^m = f(x)$

$G(x) = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c$ auch Stammfunktion

$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$

$f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow F(x) = \ln|x|$

$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow F(x) = \arctan(x)$

QUIZ

$f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

Was ist $F(x)$?

A) $6x - 4$
B) $3x^3 - 4x^2 + 5x$
C) $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5x$
D) $x^3 - 2x^2 + 5x + 42$

$f(x) = 5x^2 + \sin x - \dfrac{1}{x}$

Was ist $F(x)$?

A) $5x^3 - \sin x - \dfrac{1}{x^2}$
B) $\frac{5}{3}x^3 + \cos x - \ln|x| + C$
C) $\frac{5}{3}x^3 - \cos x - \ln|x| + C$
D) $\frac{5}{3}x^3 - \sin x + \ln|x|$

Was ist $F(x)$?   3) $\frac{5}{3}x^3 + \cos x - \ln|x| + c$ D) $\frac{5}{3}x^3 - \sin x + \ln|x|$

$$F(x) = \frac{5x^3}{3} - \cos x - \ln|x| + c$$

SUBSTITUTIONSREGEL

Theorem Sei $f: [a,b] \to W_1$ eine stetige differenzierbare Funktion und $g: D_2 \to W_2$ eine stetige Funktion mit $W_1 \subset D_2$.
Dann gilt

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\, dx$$

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

BEISPIEL

$$I = \int_0^\pi d\vartheta \, \sin\vartheta \left(5\cos^2\vartheta + 3\cos\vartheta + 1\right) = \int_{-1}^{1} du\,(5u^2 - 3u + 1) = 5\frac{u^3}{3} - 3\frac{u^2}{2} + x \Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$$

Substitution $u = -\cos\vartheta$

$$\frac{du}{d\vartheta} = \sin\vartheta \Rightarrow du = \sin\vartheta \cdot d\vartheta$$

$$\int dx\, f(x) \equiv \int f(x)\, dx$$

$$I' = \int_0^\pi d\vartheta\, \sin\vartheta\, \cos^2\vartheta$$

hier haben wir $g(x) = x^2$ $x \to \vartheta$

$f(x) = \cos x$

$g(f(x)) = \cos^2 x$

$f'(x) = \sin x$

PARTIELLE INTEGRATION

Theorem. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

BEISPIEL

$$I = \int_0^1 dx\, x\, e^x = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = (x-1)e^x \Big|_0^1 = 1$$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

INTEGRALE ÜBER RATIONALE FUNKTIONEN

$$I = \int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)}\, dx = \int_0^1 (x+5)\,dx + \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + 4\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx - 2\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{x-2}\Big|_0^1 + 4\ln|x-2|\Big|_0^1 - 2\ln|x+2|\Big|_0^1$$

$$= 6 - 2\ln 6$$

Integrand $\dfrac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)} =$

$$= x + 5 + \frac{1}{} + \frac{4}{} - \frac{2}{}$$

$(x-2)^2 \qquad x-2 \qquad x+2$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \underset{\substack{y=x-2\\ dy=dx}}{=} \int_{-2}^{-1} \frac{dy}{y^2} = \int_{-2}^{-1} y^{-2}\,dy = \frac{1}{-2+1}\, y^{-2+1}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{y}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{(x-2)}\Big|_0^1$$

Wieder substitution

UNEIGENTLICHE INTEGRALEN

- Grenzwert $\pm\infty$
- f nicht gut definiert

1) Eine Integrationsgrenze unendlich. Sei $f: [a,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, die über jedem Intervall $[a,\Lambda]$ mit $a<\Lambda<\infty$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\Lambda\to\infty}\int_a^\Lambda f(x)\,dx$ existiert, nennt man das Integral von a bis Unendlich konvergent und man setzt

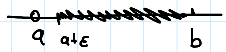
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\Lambda\to\infty}\int_a^\Lambda f(x)\,dx.$$

Analog definiert man das Integral für das Intervall $]-\infty,b]$.

BEISPIEL

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\Lambda\to\infty}\int_1^\Lambda \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^\Lambda = -\lim_{\Lambda\to\infty}\left(\frac{1}{\Lambda}-1\right) = 1$$

2) Das Integrand an einer Intervallgrenze nicht definiert.
Sei $f:]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a+\varepsilon, b]$ mit $0<\varepsilon<(b-a)$ Riemann Integrierbar ist. Falls der Grenzwert



$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ existiert, nennt man das Integral über $[a,b]$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Analog wenn für b f nicht definiert ist.

BEISPIEL

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sqrt{\varepsilon} = 2.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$$

3) Allgemeiner Fall

Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ $\quad a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[\alpha,\beta]\subset\,]a,b[$ Riemann integrierbar ist und sei $c\in\,]a,b[$ beliebig.

Falls die beiden uneigentlichen Integrale

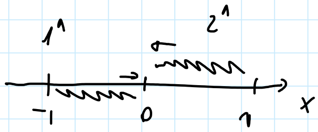
$a \quad \alpha \qquad c \qquad \beta \quad b$

Falls die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^c f(x)\,dx, \qquad \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_c^\beta f(x)\,dx$$

existieren, nennt man das Integral über $]a,b[$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



BEISPIEL

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = 4$$

$1^\wedge$ $$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^-} -2\sqrt{-x}\,\Big|_{-1}^{\varepsilon} = 2$$

$2^\wedge$ $$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_{\varepsilon}^{1} = 2$$