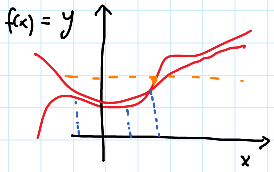
FUNKTIONEN

Definition: Seien D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$. Unter einer reelwertigen Funktion auf D versteht man eine Abbildung

$$f: D \longrightarrow W$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$



D : Definitionsbereich

W : Wertebereich

$\forall x \in D$ ordnet $y \in W$ zu

UMKEHRFUNKTION

Gibt es zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ mit $y = f(x)$, so ist die Funktion umkehrbar.

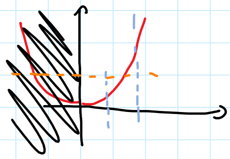
Im diesem Fall bezeichnet man mit f^{-1} die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: W \longrightarrow D$$
$$y \longrightarrow x = f^{-1}(y)$$

BEISPIEL $D = \mathbb{R}_0^+$ und $W = \mathbb{R}_0^+$ sowie $f: D \to W$
$x \to y = f(x) = x^2$

$\Rightarrow$ $f^{-1}: W \to D$
$y \to \sqrt{y} = f^{-1}(y)$

$\pm\sqrt{y}$

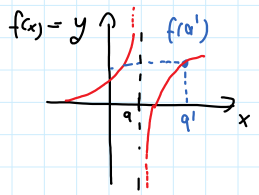


GRENZWERTE VON FUNKTIONEN

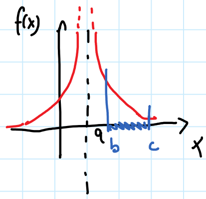
Definition: Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = a$ den Grenzwert

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

wenn sich die Funktion $f(x)$ bei unbegrenzter Annäherung von x an a unbegrenzt an A nähert.



Die Funktion $f(x)$ muss an der Stelle $x = a$ den Wert A nicht annehmen und braucht auch nicht definiert sein. A könnte auch $\pm\infty$ sein.



Grenzwerte können auch einseitig sein

Linke Seite $\lim_{x \to a^-} f(x) = A$ bei $(x < a)$

Rechte Seite $\lim_{x \to a^+} f(x) = B$ bei $(x > a)$

STETIGKEIT

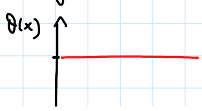
Definition: $a \in D$. Man bezeichnet eine Funktion als STETIG im Punkte a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Mann bezeichnet als im einem Intervall stetig, falls sie im jedem Punkt des Intervalls stetig ist.

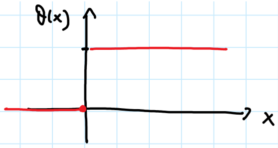
DIE HEAVISIDE - FUNKTION

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



DIE HEAVISIDE - FUNKTION

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^+} \vartheta(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} \vartheta(x) = 0$$

Ist im 0 nicht stetig

SÄTZE ÜBER STETIGE FUNKTIONEN

THEOREM Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in x_0 stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann sind auch die Funktionen:

$$f + g : D \to \mathbb{R}$$
$$\lambda \cdot f : D \to \mathbb{R}$$
$$f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$

im Punkte x_0 stetig.

Ist ferner $g(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D' \longrightarrow \mathbb{R}$$

im x_0 stetig sein, wobei $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

QUIZ

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$

Ist im x_0 $\boxed{\text{A) stetig}}$

B) nicht stetig

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$

$\boxed{\text{A) stetig}}$

B) nicht stetig

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-x} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + e^{x} & x > 0 \end{cases}$$

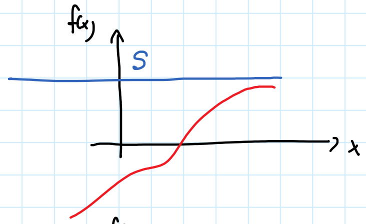
$x_0 = 0$

A) stetig

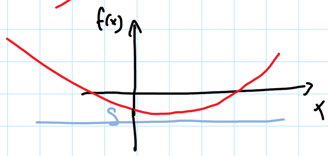
$\boxed{\text{B) nicht stetig}}$

EIGENSCHAFTEN DER REELLEN FUNKTIONEN

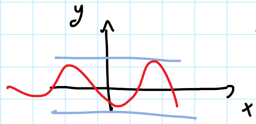
- NACH OBEN BESCHRÄNKT, wenn $\exists S \in \mathbb{R} \cdot \forall x \in D \quad f(x) \leq S$



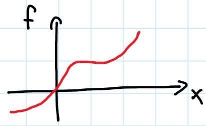
- NACH UNTEN BESCHRÄNKT, wenn $\exists S \in \mathbb{R} : \forall x \in D \quad f(x) \geq S$



- BESCHRÄNKT, wenn $\exists S \in \mathbb{R} : \forall x \in D \quad |f(x)| \leq S$



- MONOTON WACHSEND, wenn $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

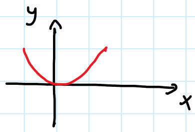


- STRENG MONOTON WACHSEND, wenn $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- MONOTON FALLEND, wenn $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

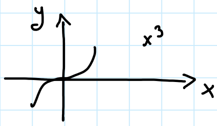
- STRENG MONOTON FALLEND, wenn $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$y = f(x)$

- GERADE, wenn $f(-x) = f(x)$



- UNGERADE, wenn $f(-x) = -f(x)$



RATIONALE FUNKTIONEN

Definition: Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen. Unter einer rationalen Funktion versteht man eine Funktion

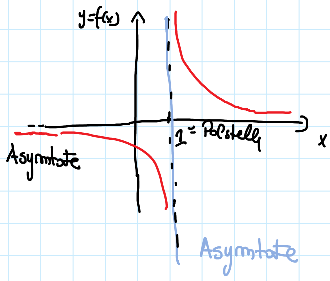
$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion ist gegeben durch

$$D = \{x \in \mathbb{R},\ q(x) \neq 0\}$$

BEISPIEL

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$



Eine rationale Funktion ist im ihrem Definitionsbereich stetig.

Polstelle: x-Wert für den die Funktion gegen $\pm$ Unendlich geht $\quad x = 1$

Asymptote: eine Gerade der sich die Kurve für große $|x|$-Werte beliebig nahe annähert.

Eine rationale Funktion kann Polstellen und Asymptote haben, muss aber nicht.

PARTIALBRUCHZERLEGUNG

Rationale Funktionen können in Partialbrüche zerlegt werden.

Ist $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ...

Rationale Funktionen können in Partialbrüche zerlegt werden.

Ist $p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$ Grad n

$q(x) = q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \dots + q_1 x + q_0$ Grad m

und ist außerdem die Faktorisierung des Nennerpolynoms bekannt

$$q(x) = c \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{\lambda_j}$$

λ_j ist die Multiplizität der Nullstelle x_j. r vielfache Nullstellen

$\shortparallel$

Vielfachheit

So läßt sich die Rationalfunktion

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = P(x) + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k} \quad *$$

wobei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $= \deg p(x) - \deg q(x)$ und $a_{jk} \in \mathbb{R}$

$\downarrow$ Grad

$= n - m$

BEISPIEL $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2 (x+2)} = P(x) + \dots \quad *$

$q(x) = (x-2)^2 (x+2) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

POLYNOMDIVISION

$$(x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18) : (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) = (x+5) + \frac{2x^2 + 9x - 22}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

$-(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x)$

$5x^3 - 8x^2 - 11x + 18$

$-(5x^3 - 10x^2 - 20x + 40)$

$\underbrace{2x^2 + 9x - 22}_{\text{Rest}}$

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \underbrace{(x+5)}_{P(x)} + \underbrace{\frac{2x^2 + 9x - 22}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}}_{\text{Rest}}$$

$$\frac{2x^2 + 9x - 22}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{a_{12}}{(x-2)^2} + \frac{a_{11}}{x-2} + \frac{a_{21}}{x+2}$$

$$= \frac{a_{12} \cdot (x+2) + a_{11} (x-2)(x+2) + a_{21} (x-2)^2}{(x-2)(x-2)(x+2)}$$ auf den Hauptnenner

$= \dots$

$$\overset{!}{=} \frac{(a_{11} + a_{21}) x^2 + (a_{12} - 4a_{21}) x + (2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21})}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

Wir möchten diese Form haben

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{a_{ik}}{(x-x_j)^k} = \underbrace{\frac{a_{11}}{(x-2)} + \frac{a_{12}}{(x-2)^2}}_{x=2} + \frac{a_{21}}{(x+2)}$$

$\uparrow$ multipl.

Nullstellen $q(x)$ $x = 2$ Multiplizität 2 $\lambda_1 = 2$

$x = -2$ " 1 $\lambda_2 = 1$

$$2x^2 + 9x - 22 = (a_{11} + a_{21}) x^2 + (a_{12} - 4a_{21}) x + (2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{21} = 2 \\ a_{12} - 4a_{21} = 9 \\ 2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21} = -22 \end{cases}$$

LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM

$$\Rightarrow \quad a_{12} = 1, \quad a_{11} = 4, \quad a_{21} = -2$$

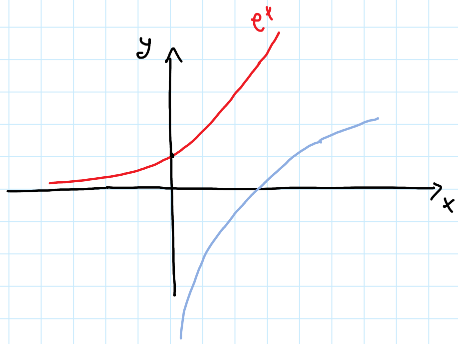
Rest

$$\Rightarrow \frac{2x^2 + 9x - 22}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{4}{(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x+2)}$$

Ende

BERÜHMTE FUNKTIONEN

EXPONENZIAL F. $f(x) = e^x$



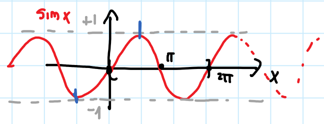
LOGARITHMUS $f(x) = \log(x)$

$x > 0$ definiert

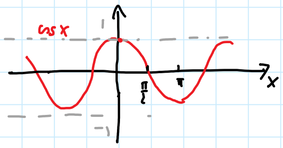
TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

$f(x) = \sin x$

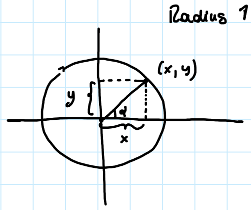
$f(y) = \cos x$



Periodisch 2π



Radius 1

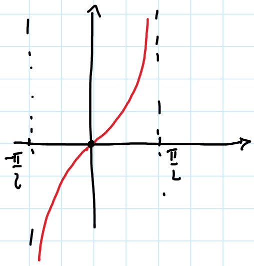


$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

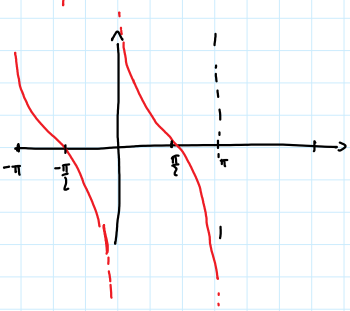
$$\rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$\operatorname{Tan} x = \frac{\sin x}{\cos x}$



Auch Periodisch

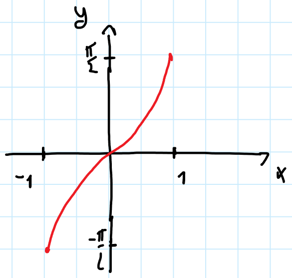
$\operatorname{Cot} x = \frac{\cos x}{\sin x}$



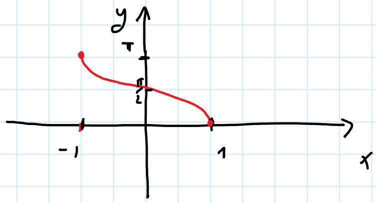
Auch Periodisch

ARKUSFUNKTIONEN

$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$



$\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$



$(\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}$

$\neq$

$\cos^{-1} x$

$\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$

$\operatorname{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$

HYPERBOLISCHEN FUNKTIONEN

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Die beschreiben eine Hyperbel anstatt eines Kreises.