

FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN

Definition: Sei U eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten eine Funktion

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

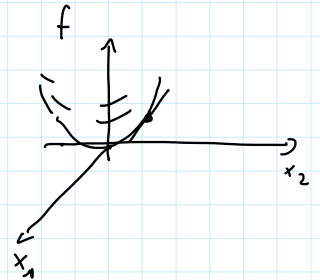
$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n)$$

f ist eine Funktion mehrerer Variablen.

BEISPIEL $U = \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$(x_1, x_2) = (1, 2) \Rightarrow f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5$$



PARTIELLE ABLEITUNG

Die Funktion f ist PARTIELL DIFFERENZIERBAR in der i -TEN KOORDINATE, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} \text{ existiert.}$$

i -te PARTIELLE ABLEITUNG

Man hält alle anderen Variablen $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fest und nimmt die gewöhnliche Ableitung nach der Variable x_i .

Eine Funktion ist PARTIELL DIFFERENZIERBAR, falls sie in alle Variablen differenzierbar ist.

" " STETIG PARTIELL DIFFERENZIERBAR, " " stetig partiell diff. in (Ableitungen existieren und sind stetig)

BEISPIEL

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1 \cdot 2 x_1}{2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

BEISPIEL

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^3 + x_2 + x_3^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3 x_1^2}{2 \sqrt{x_1^3 + x_2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2 \sqrt{x_1^3 + x_2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2 x_3}{2 \sqrt{x_1^3 + x_2 + x_3^2}}$$

$$\sim x_1^3 + x_2 + x_3^2$$

Quiz

$$f(x, y) = x^2 \cdot e^{y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x^2 \cdot e^{y^2} \cdot 2y$$

A) $x^2 e^{y^2}$

B) $2x^2 e^{y^2}$

C) $x e^{y^2}$

D) $2x^2 y e^{y^2}$

Quiz

$$f(x, t) = A \sin(x - vt)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = A \cos(x - vt) (-v)$$

A) $A \cos(x - vt)$

B) $-A \cos(x - vt)$

C) $v A \cos(x - vt)$

D) $-v A \cos(x - vt)$

HÖHERE PARTIELLE ABLEITUNGEN

Definition: Wir können partielle Ableitungen auch hintereinander ausführen und erhalten höhere Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_m) \right)$$

1) Ableitung nach x_j

2) Ableitung nach x_i

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

THEOREM

Sei f zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für die partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_m)$$

THEOREM

Allgemeiner gilt: Ist f k -mal stetig partiell differenzierbar, so vertauschen die k -ten partielle Ableitungen,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}}_{k\text{-partielle Ableitungen}} f(x_1, \dots, x_m) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_1)}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_k)}}}_{k\text{-partielle Ableitung}} f(x_1, \dots, x_m)$$

Wobei σ ist eine Permutation von $(i_1, \dots, i_k)$ ist.

BEISPIEL

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 3x_1x_2^2 + x_1x_2x_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} (6x_1x_2 + x_1x_3) = 6x_2 + x_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} (3x_1^2 + 3x_2^2 + x_2x_3) = 6x_2 + x_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (3x_1^2 + 3x_2^2 + x_2x_3) = 6x_1$$

Quiz

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2x_2^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = ?$$

A) 0

B) $9x_1^2$

C) $18x_1x_2^2$

D) $9x_1^2x_2^2 + 6x_1x_2^3$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 3 \cdot 3x_1^2x_2^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (9x_1^2x_2^2) = 9 \cdot 2x_1x_2^2 = 18x_1x_2^2$$

"Pathologisches Fall"

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{wenn } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wenn } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = -1$$

DAS TOTALE DIFFERENTIAL

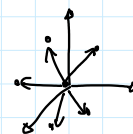
• Für die Verkettung $(f \circ x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von Funktionen $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

gilt die verallgemeinerte Kettenregel

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

$f(x(t))$ Funktion von Funktion

$$f \circ x$$



m-teilen
m-Koordinaten

$$x_i(t) \quad i=1, \dots, m$$

$f(x(t))$ Funktion von Funktion

$\frac{d}{dt}$

m-Koordinaten

$$f \circ x$$

$$x_i(t) \quad i=1, \dots, m$$

$$t \in \mathbb{R} \quad f(x(t)) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt} f = \frac{df}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} \cdot dt = df$$

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \quad \text{TOTALE DIFFERENTIAL}$$

Wie sich f verändert, wenn sich die x_i jeweils um einen infinitesimalen Betrag verändern

GRADIENT

Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ können wir den Gradient definieren

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}$$

$$x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^m$$

$$\text{grad } f \in \mathbb{R}^m$$

Der Gradient lässt sich mit Hilfe des Nabla Operator definieren

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad \text{VEKTOR}$$

als $\text{grad } f \equiv \vec{\nabla} f$ schreiben

Der Gradient von f zeigt in die Richtung der maximalen Zunahme von f unter Variation der x_i

$$\vec{\nabla} f(x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m} f(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ z(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix}$$

DIVERGENZ

Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \rightarrow (f_x, f_y, f_z) \equiv \vec{f}$$

Dazu können wir mit Hilfe des $\vec{\nabla}$ Operator die DIVERGENZ definieren

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

Kann kann im $\mathbb{R}^m$ definieren

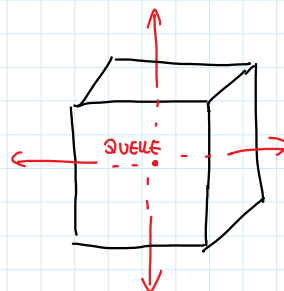
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$f_x(x, y, z)$$

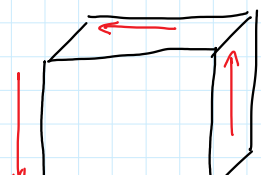
$$f_y(x, y, z)$$

$$f_z(x, y, z)$$



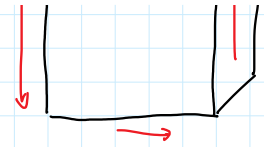
ROTATION

$$\text{rot } \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$



ROTATION

$$\text{rot } \vec{f} = \vec{r} \wedge \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \\ \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \end{pmatrix}$$



LAPLACE OPERATOR

Für eine Skalarfunktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die zweimal differenzierbar ist

- Der LAPLACE-Operator ordnet zu f die Divergenz des Gradienten

$$\text{div} \cdot \text{grad } f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f \quad \nabla^2 \equiv \text{LAPLACE OPERATOR}$$

Im 3D

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$