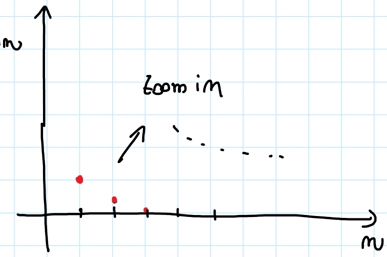
Montag, 31. März 2025 12:16

FOLGEN UND REIHEN

FOLGEN

Definition: Unter eine Folge (a_n) reeller Zahlen versteht man eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ in der jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird.



BEISPIEL $a_n = \frac{1}{n^2}$

Explizit $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{9}$, $a_4 = \frac{1}{16}$, $a_5 = \frac{1}{25}$, ...

Definition: Eine Folge a_n heisst KONVERGENT gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

In diesem Fall schreibt man $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

a heißt Grenzwert der Folge oder Limes.

Im anderen Worten liegen für jede konvergente Folge ab einem bestimmten N alle Folgenglieder im Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ $\quad [1, 2]$

Grenzwerte nicht included

$]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[$

$]-\varepsilon, \varepsilon[$

Definition: Eine Folge nennt man DIVERGENT, wenn sie keinen Grenzwert hat, z.B. divergiert gegen $\pm\infty$

BEISPIEL $a_n = n$

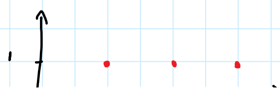
$a_n = 1 - n^2$

BESCHRÄNKTE FOLGEN

Definition: Eine Folge heißt nach oben beschränkt, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Eine Folge heißt nach unten beschränkt, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \geq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

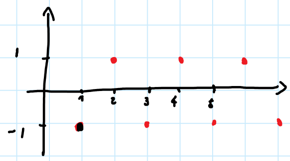
- Die Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Eine beschränkte Folge ist nicht notwendigerweise konvergent



$a_n = (-1)^n = \{ 1$ für n gerade

- Eine beschränkte Folge ist nicht notwendigerweise konvergent

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$



RECHENREGELN FÜR KONVERGENTE FOLGEN

Seien a_n und b_n zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Dann sind auch die Folgen a_n+b_n, a_n-b_n, $\underbrace{\lambda a_n}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, $a_n \cdot b_n$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a+b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a-b$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Ist weiter $b \neq 0$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, dann können wir auch $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq N}$ betrachten. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

THEOREM

Seien a_n und b_n zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle n.

Dann gilt es auch $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Bemerkung: Aus $a_n < b_n$ folgt nicht $a = \lim_{n\to\infty} a_n < b = \lim_{n\to\infty} b_n$

BEISPIEL $a_n = 0$ $\qquad a = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$b_n = \frac{1}{n}$ $\qquad b = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$0 < \frac{1}{n}$ aber $a < b$

$0 < 0$ Nicht wahr!

QUIZ

Die Folge $a_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

A) divergent

B) konvergent mit Grenzwert 0

C) konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

D) konvergent mit Grenzwert 1

REIHEN

Sei a_m eine Folge reeller Zahlen.
Man betrachtet nun die Folge S_N der PARTIALSUMMEN

$$S_N = \sum_{m=1}^{N} a_m$$

Als UNENDLICHE REIHE bezeichnet man nun die Folge dieser Partialsumme.

Man schreibt $$\sum_{m=1}^{\infty} a_m = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} a_m .$$

Eine unendliche Reihe heißt KONVERGENT, wenn die Folge der Partialsumme konvergiert (Grenzwert existiert).
Ansonsten heißt die unendliche Reihe DIVERGENT

GEOMETRISCHE REIHE

Die geometrische Reihe ist $$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$$

Die Reihe konvergiert nur für $|x|<1$ (sonst divergiert), weil folgendes gilt für die Partialsumme $$S_N = \sum_{m=0}^{N} x^m = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

BEWEIS $$S_N = 1 + x + x^2 + \dots + x^N$$

$$\frac{S_N - 1}{x} = \frac{x + x^2 + \dots + x^N}{x} \qquad x \neq 0$$

$$= 1 + x + \dots + x^{N-1} = S_{N-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S_N - 1}{x} = S_{N-1}}$$

$$\boxed{S_{N-1} = S_N - x^N}$$

Zusammen bekommen wir $$\frac{S_N - 1}{x} = S_N - x^N$$

$$S_N - 1 = (S_N - x^N)\cdot x$$

$$= S_N \cdot x - x^{N+1}$$

$$S_N - S_N x = 1 - x^{N+1}$$

$$S_N(1-x) = 1 - x^{N+1} \implies S_N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \quad \checkmark$$

HARMONISCHE REIHE

$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ ist DIVERGENT

$$S_m = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \dots$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$= 1 + 1 + \dots = \infty$$

ANDEREN WICHTIGE REIHEN

$$\exp x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \underset{m=0}{x} - \underset{m=1}{\frac{x^3}{3!}} + \underset{m=2}{\frac{x^5}{5!}} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \underset{m=0}{1} - \underset{m=1}{\frac{x^2}{2!}} + \underset{m=2}{\frac{x^4}{4!}} + \dots$$

$$\sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cosh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

FORMEL VON EULER

$m = 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \dots$

gerade + ungerade Zahlen

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m x^m}{m!} = \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m} x^{2m}}{(2m)!}}_{\text{gerade}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m+1} \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{\text{ungerade}}$$

$$(ix)^{2m+1} = i^{2m+1} x^{2m+1}$$

$$i^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m$$

$$i^{2m+1} = i^{2m} \cdot i$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} \quad . \quad i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$= \cos x + i \sin x$$

$$i^{2m+1} = i^{2m} \cdot i = (-1)^m \cdot i$$

Das ist ein Beweis der Formel von Euler durch die Reihedarstellung

Analogerweise $e^x = \cosh x + \sinh x$ $\qquad i \to -i$

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

① $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

② $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

① + ② $\Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \Rightarrow$ $\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$

① − ② $\Rightarrow e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \Rightarrow$ $\boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$

ADDITIONSTHEOREME

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

Equivalent $\quad e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)$$

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i \sin\beta$$

$z_1 = x_1 + i y_1$

$z_2 = x_2 + i y_2$

$z_1 = z_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$y_1 = y_2$

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i \sin\alpha)(\cos\beta + i \sin\beta)$$

$$= \cos\alpha \cos\beta + i \sin\alpha \cos\beta + i \cos\alpha \sin\beta + \underbrace{i^2}_{-1} \sin\alpha \sin\beta$$

$$= \cos\alpha \cos\beta + i \sin\alpha \cos\beta + i \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$= (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) + i (\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \end{cases}$$