DIFFERENTIALRECHNUNG

DIE ABLEITUNG

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

f nennt man im Punkte $x_0 \in D$ DIFFERENZIERBAR, falls der Grenzwert

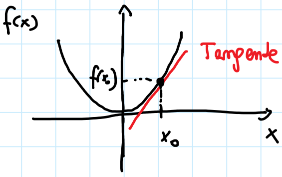
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Die Ableitung $f'(x_0)$ ist eine reelle Zahl.
Aber wir können auch $f'(x)$ für verschiedene x als Funktion sehen.
Man schreibt

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

GEOMETRISCHE BEDEUTUNG



$\to t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente im Punkte x_0

Gerade $y = ax + b = t(x)$ t Funktion

Steigung $a = f'(x_0)$

Gerade geht durch $(x_0, f(x_0))$

$$t(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{a} \cdot x_0 + b = f(x_0) \quad \overset{\text{Umformung}}{\Rightarrow} \quad b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Tangente $\quad t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

BEMERKUNG

Eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion $f(x)$ ist dort auch stetig.

Beweis: Annahme: $f'(x)$ existiert im x_0 $\boxed{\text{Differenzierbar} \Rightarrow \text{stetig}}$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} (x - x_0) \qquad\qquad f(x) - f(x_0) = [f(x) - f(x_0)] \cdot 1$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

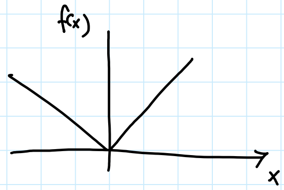
$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ d.h. die Funktion f ist stetig im x_0

Aber stetig im x_0 heisst nicht unbedingt differenzierbar im x_0. $\boxed{\text{Stetig} \not\Rightarrow \text{differenzierbar}}$

Aber stetig im x_0 heisst nicht unbedingt differenzierbar im x_0. | Stetig $\not\Rightarrow$ differenzierbar

QUIZ

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



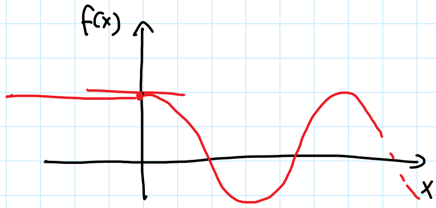
Im Punkte $x_0 = 0$

A) differenzierbar

B) nicht differenzierbar

stetig $\quad f'(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $\quad$ nicht differenzierbar

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$



Im Punkte $x_0 = 0$

A) differenzierbar

B) nicht differenzierbar

WICHTIGE ABLEITUNGEN

$f(x) = x^m \Rightarrow f'(x) = m\,x^{m-1}$

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

SÄTZE ÜBER ABLEITUNGEN

Theorem: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$

Dann sind auch die Funktionen $f+g$ und λf differenzierbar in x und gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

Theorem PRODUKTREGEL

Auch die Funktion $f \cdot g$ ist im x differenzierbar

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

BEWEIS

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big[f(x+h)g(x+h) \underbrace{- f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x)}_{=0} - f(x)g(x)\Big]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big[f(x+h)\big[g(x+h) - g(x)\big] + \big[f(x+h) - f(x)\big]g(x)\Big]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big[\underbrace{f(x+h)\,[g(x+h) - g(x)]}_{f_1} + \underbrace{[f(x+h) - f(x)]\,g(x)}_{f_2} \Big]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(x+h)\,[g(x+h) - g(x)] + \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)]\,g(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} \overbrace{f(x+h)}^{f_1} \overbrace{\frac{[g(x+h) - g(x)]}{h}}^{f_2} + \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)]}{h} \cdot g(x)$$

$$= f(x) \cdot g'(x) + f'(x)\,g(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) \overset{!}{=} f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

BEISPIEL $\quad f(x) = x^2 \sin x$

$$= 2x \cdot \sin x + x^2 \cos(x)$$

THEOREM $\quad$ Ist weiter $g(x) \neq 0 \; \forall x \in D$, dann ist auch die Funktion f/g differenzierbar in x

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

THEOREM (KETTENREGEL): Seien $f: D_1 \to W_1$ und $g: D_2 \to W_2$ Funktionen mit $W_1 \subset D_2$.

Falls f im Punkte $x \in D_1$ differenzierbar ist und g im Punkte $y = f(x) \in D_2$ differenzierbar ist so ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f: D_1 \longrightarrow W_2$ in x differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$f(x) = \sin(3x^2 + 4x + 5) \longrightarrow g(x) = \sin(x) \qquad f(x) = 3x^2 + 4x + 5$

$$f'(x) = \underbrace{\cos(3x^2 + 4x + 5)}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{(6x + 4)}_{f'(x)}$$

THEOREM: ABLEITUNG DER UMKEHRFUNKTION

Sei $D \subset \mathbb{R}$ $\quad f: D \to W$ stetig und streng monotone Funktion

$f^{-1}: W \to D$

Ist f im Punkte x differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} im Punkte $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

BEISPIEL $\quad f(x) = e^x = y$

$f^{-1}(y) = \ln y$

$f^{-1}(y) = \ln y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

$\Rightarrow \quad f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

BEISPIEL VON SIN ABLEITUNG

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$\sin'(x) = \frac{d}{dx}\sin x = \frac{1}{2\cancel{i}}\left(\cancel{i}\,e^{ix} + \cancel{i}\;e^{-ix}\right) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x$$

WEITERE WICHTIGE ABLEITUNGEN

$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

... ...

QUIZ

$f(x) = 3x^3 - 4$

$f'(x) = ?$

A) $\frac{3}{4}x^4 - 4x$

B) $9x^2 - 4$

C) $9x^2$

D) $3x^2 - 4$

$f(x) = \sin(\cos(2x))$

$f'(x) = ?$

A) $2\cos(\cos(2x))$

B) $2\sin(2x)\cdot\cos(\cos(2x))$

C) $-2\cos(2x)\cdot\cos(\sin(2x))$

D) $-2\sin(2x)\cdot\cos(\cos(2x))$

HÖHERE ABLEITUNG

Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Ist $f': D \longrightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls wieder differenzierbar, so bezeichnet man mit

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = (f')'(x)$$ die ZWEITE ABLEITUNG.

Ist f'' differenzierbar $\Rightarrow f'''(x)$

Allgemein schreiben wir für die n-te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

Unter der 0-ten Ableitung versteht man die Funktion f selbst.

BEISPIEL

$$f(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 5$$

$$f'(x) = 15x^4 + 28x^3 + 6x^2 + 2x - 1$$

$$f''(x) = 60x^3 + 84x^2 + 12x + 2$$

$$f'''(x) = 180x^2 + 168x + 12$$

$$f^{(4)}(x) = 360x + 168$$

$$f^{(5)}(x) = 360$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

BEISPIEL

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

$$\vdots$$

QUIZ

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f^{(4)}(x) = ?$$

A) e^{2x}

B) $2e^{2x}$

C) $16e^{2x}$

D) $24\, e^{2x}$

STETIGE DIFFERENZIERBARKEIT

Definition: Eine Funktion $f(x)$ nennt man STETIG DIFFERENZIERBAR, falls sie differenzierbar ist, und die Ableitung $f'(x)$ stetig ist

Definition. Eine Funktion $f(x)$ nennt man n-MAL STETIG DIFFERENZIERBAR, falls sie n-mal differenzierbar ist, und die n-te Ableitung stetig ist.

BEISPIEL DIFFERENZIERBAR ABER NICHT STETIG-DIFFERENZIERBAR

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f ist differenzierbar im $0 = x$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{2}} \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{\cancel{h}} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

nicht stetig im 0

nicht stetig differenzierbar