IMPLIKATION $\Rightarrow$

p	q	$p \Rightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Es regnet $\Rightarrow$ die Strasse wird nass   W $\Rightarrow$ W ist W

Wenn es regnet $\Rightarrow$ die Strasse wird nicht nass   W $\Rightarrow$ F ist F

Wenn es nicht regnet $\Rightarrow$ die Strasse ist nass   F $\Rightarrow$ W ist W

Wenn es nicht regnet $\Rightarrow$ die Strasse ist nicht nass   F $\Rightarrow$ F ist W

ZAHLEN

DIE NATÜRLICHE ZAHLEN $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Axiome von Peano

P1) Die Zahl 0 ist eine natürliche Zahl

P2) Falls n eine natürliche Zahl ist, so ist die nachfolgende Zahl $n+1$ ebenfalls eine natürliche Zahl

P3) Die natürliche Zahlen sind die minimale Menge, welche die ersten beide Axiome erfüllt.

GRUPPE

Menge G mit Operation $*$

- $*$ ist assoziativ $(a * b) * c = a * (b * c)$
- es gibt ein neutrales Element $a * e = e * a = a$
- $\forall\, a \in G, \exists\, a^{-1}$ INVERSE $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

FRAGE: Ist $\mathbb{N}$ versehen mit der Operation $+$ eine Gruppe?

$a = 3$ b ist Invers $3 + b = 0$

Sei $a, b \in \mathbb{N}$

MULTIPLIKATION $a \cdot b \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{b}$ ist im Allgemeinen keine Natürliche Zahl

- Ist assoziativ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Ist kommutative $a \cdot b = b \cdot a$

- Neutrales Element $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Addition und Multiplikation sind distributiv:

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Beispiel

$(3+5)7 = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7$

DER INDUKTIONSBEWEIS

BEHAUPTUNG $f(n) = g(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ beweisen

$n \to n$
$m \to m$

Es bietet sich der Induktionsbeweis an

① INDUKTIONSANFANG

Zeigen dass die Behauptung für $n=1$ richtig ist

② INDUKTIONSSCHRITT

Annehmen dass die Behauptung für $(n-1)$ richtig ist $\Rightarrow$ ist richtig auch für n

n $n+1$

$n=1$ ①

$n=2$ ②

...

BEISPIEL $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

① $n=1$ linke Seite $\displaystyle\sum_{j=1}^{1} j = 1$ rechte Seite $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ ✓

② $$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} j}_{1+2+\dots+n-1+n} = \underbrace{\boxed{\sum_{j=1}^{n-1} j}}_{} + n = \boxed{\frac{(n-1)\cdot n}{2}} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Behauptung für $n-1$ richtig

$$\sum_{j=1}^{n} j = \underbrace{1+2+3+\dots+n-1}_{} + n = \sum_{j=1}^{n-1} j + n$$

DIE GANZEN ZAHLEN $\mathbb{Z}$

$a, b \in \mathbb{N}$ $a-b$ nicht unbedingt eine natürliche Zahl

$b > a$ nicht im $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ Menge erweitern

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\dots, -3, -2, -1, \underbrace{0, 1, 2, 3, \dots}_{\mathbb{N}}\}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\dots, -3, -2, -1\}$

- Addition, Multiplikation setzen sich auf $\mathbb{Z}$ fort
- Assoziativ, kommutativ, Distributiv Eigenschaften bleiben
- $\forall z \in \mathbb{Z}$ $\underset{\text{es existiert}}{\exists}$ Inverse $-z \in \mathbb{Z}$ mit $z + \underbrace{(-z)}_{\text{Inverse}} = 0$ Operation ≡ Addition $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ mit $+$ versehen ist eine Gruppe

$2 \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ NICHT IN $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\cdot$ versehen ist keine Gruppe

$r = r$

DIE RATIONALEN ZAHLEN $\mathbb{Q}$

Wenn $a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ hat nur eine Lösung $\in \mathbb{Z}$ wenn b ein Teiler von a ist

Um $\forall\, b \neq 0$ eine Lösung angeben zu können, erweitern wir auf rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ r \;\middle|\; r = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

- $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \iff p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$

  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

- Addition, Multiplikation setzen sich auf $\mathbb{Q}$ fort
- Assoziativ, kommutative, Distributivgesetze bleiben

BRUCHRECHNEN

BEISPIELE

- Erweitern / kürzen $\quad \frac{c\, p_1}{c\, q_1} = \frac{p_1}{q_1}$ $\qquad \frac{15}{9} = \frac{\cancel{3} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot 3} = \frac{5}{3}$
- Multiplikation $\quad \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$
- Division $\quad \frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$ $\qquad \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$
- Addition $\quad \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 q_2}$ $\qquad \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{15} = \frac{19}{15}$
- Subtraktion $\quad \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2}$

POTENZEN

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}} \qquad a^0 = 1$$

Rechnen mit Potenzen:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $\qquad \frac{a^n}{a^m} = a$

Beispiele

$$2^7 \cdot 3^7 = (2 \cdot 3)^7 = 6^7$$
$$2^5 \cdot 2^7 = 2^{(5+7)} = 2^{12}$$
$$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$$

QUIZ

$$x^{-5} x^2 x^3 = ?$$

A) x^{-30}

B) x^6

C) 1

D) x

QUIZ

$$\frac{x^{-1} x^3 x^5}{x^2 x^7} = ?$$

A) 0

B) 1

C) x^2

D) $\frac{1}{x^2}$

BINOMISCHEN FORMEL

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

DIE REELLEN ZAHLEN

IRRATIONALE ZAHLEN lassen sie nicht als Brüche darstellen

$x^2 = 2$ $\qquad x = \pm\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl $\mathbb{I}$

$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ Reellen Zahlen

$\pi = 3{,}14159 \ldots$

$e = 2{,}718281 \ldots$ $\qquad \in \mathbb{R}$

Addition, Multiplikation fortsetzen

Die reelle Zahlen sind angeordnet $x \gtreqless 0$ $x>0$ positiv $x<0$ negativ

Axiomen

O1) $x<0$, $x=0$, $x>0$

O2) Aus $x>0$, $y>0$ $\Rightarrow$ $x+y>0$

O3) Aus $x>0$, $y>0$ $\Rightarrow$ $x \cdot y > 0$

Weitere Operationen

- Potenzen
- Wurzeln
- Logaritmus

LOGARITMUS

$$x = \log_b a \iff b^x = a$$

b : basis

Logaritmengesetze

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$$

$$\log_b(a/c) = \log_b a - \log_b c$$

$$\log_b(a^c) = c \log_b a$$

$$\log_b c = \frac{1}{\log_c b}$$

Wichtige Logaritmen

$$\log_e x = \ln x$$

$$\log_{10} x = \operatorname{Log} x$$

LINEARE GLEICHUNGEN

Es seien $a \neq 0$ und b gegebene reelle Zahlen und x eine Unbekannte.

Mann nennt $ax + b = 0$ eine lineare Gleichung für x.

Die Gleichung hat die Lösung $x = -\frac{b}{a}$.

QUADRATISCHE GLEICHUNG

Es seien $a \neq 0$, b und c gegebene reelle Zahlen und x eine Unbekannte.

Mann nennt $ax^2+bx+c=0$ eine quadratische Gleichung.

DISKRIMINANTE $D = b^2 - 4ac$

Wenn $D \geq 0$, so hat die Gleichung die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right)$$

$x_{1/2}$ → x_1, x_2

QUIZ $\quad 2x^2 - 5x + 3 = 0$

A) $2, 5$

B) $-5, 3$

C) $\frac{3}{2}, 1$

D) $-\frac{1}{2}, 3$

$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{4} \quad \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$