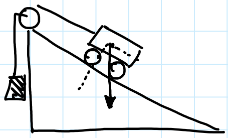
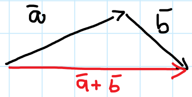
VECTOREN

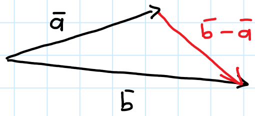
MOTIVATION



a+b $\vec{a} + \vec{b}$

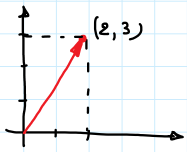
$\bar{a} + \bar{b}$



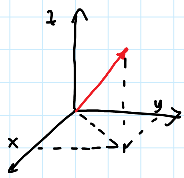


$\mathbb{R}^2$ $\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Beispiel $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



$\mathbb{R}^3$ $\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$



$$\mathbb{R}^m = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \middle| \ x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R} \right\}$$

VEKTORRÄUME

Sei V eine Menge und sei $(V,+)$ eine kommutative Gruppe

Operation $+ : V \times V \longrightarrow V$ SUMME z.B. $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}_3$

$\bar{v}_1 \in V$
$\bar{v}_2 \in V$
$\bar{v}_3 \in V$

BEISPIELE

SUMME $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

SKALAR MULTIP. $3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$

Operation $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ SKALAR MULTIPLIKATION

$k \in K$ und $\bar{v} \in V$

$(k, \bar{v}) \longrightarrow k \cdot \bar{v}$ mit $k\bar{v} \in V$ $k \in \mathbb{R}$

$(V, +, \cdot)$ ist ein VEKTORRAUM, wenn folgenden Axiome gelten

A1) Es gelten die Distributivgesetze:

$k \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = (k \cdot \bar{v}_1) + (k \cdot \bar{v}_2) = k\bar{v}_1 + k\bar{v}_2$

A1) Es gelten die Distributivgesetze:

$$k \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = (k \cdot \bar{v}_1) + (k \cdot \bar{v}_2) = k\bar{v}_1 + k\bar{v}_2$$

$$(k_1 + k_2) \cdot \bar{v} = k_1 \cdot \bar{v} + k_2 \cdot \bar{v} = k_1\bar{v} + k_2\bar{v}$$

A2) Es gilt das Assoziativgesetz:

$$k_1 \cdot (k_2 \cdot \bar{v}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \bar{v} = k_1 k_2 \bar{v}$$

A3) Für die Eins $1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

TRANSPOSITION

$\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ Spalte $\qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$\bar{v}^T = (x, y, z)$ Zeile $\qquad \bar{v}^T = (x_1, x_2, \dots x_m)$

QUIZ $\qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 =$$

A) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$

EINHEITSVEKTOREN

Definition

$$\bar{e}_i = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ Stellen}}, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)^T$$

m Dimensionen

Alle Komponenten sind Null bis auf eine die Eins ist. → EINHEITSVEKTOR

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT $\qquad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Definition Seien m Vektoren $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m$ gegeben.

Wenn $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_m\bar{v}_m = \bar{0}$

$\Rightarrow$

dann $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$

dann sind $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m$ LINEAR UNABHÄNGIG.

Andersfalls nennt man sie linear abhängig.

BASIS UND DIMENSION

Definition Sei V ein Vektorraum. Die maximale Anzahl linearer unabhängiger Vektoren in V nennt man die DIMENSION des VECTORRAUMES.

Definition Eine Menge linearer unabhängiger Vektoren, die maximal ist, nennt man eine BASIS von V.

$\mathbb{R}^2$ $\quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow a_1 = 0$ und $a_2 = 0$

linear unabhängig $\quad$ DIMENSION IST 2

$\mathbb{R}^n$ $\quad$ DIMENSION n

Basis $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ $\quad$ STANDARDBASIS

BEISPIELE $\quad \mathbb{R}^3 \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

n-te

EUKLIDISCHES SKALARPRODUKT

Seien $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Die Komponentendarstellung der beide Vektoren bezüglich des Standardbasis sei

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Wir definieren das EUKLIDISCHES SKALARPRODUKT zwischen zwei Vektoren als die Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

EIGENSCHAFTEN

- Linear in der ersten Komponente $\quad (\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z}$; $(k \cdot \bar{x}) \cdot \bar{y} = k \cdot (\bar{x} \cdot \bar{y})$
- Linear in der zweite Komponente $\quad \bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{z} \quad \bar{x} \cdot (k\, \bar{y}) = k\, \bar{x} \cdot \bar{y}$
- Symmetrisch $\quad \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$
- Positiv definiert $\quad \bar{x} \cdot \bar{x} > 0$ falls $\bar{x} \neq \bar{0}$

BEISPIEL

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

QUIZ

$$\begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix} =$$

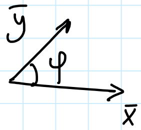
A) 1
B) 2
C) 32
D) 42

BETRAG EINES VEKTORS

Definition

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$$

Länge des Vektors = Betrag



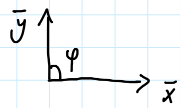
Seien $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

φ Winkel zwischen $\bar{x}$ und $\bar{y}$

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}|\cos\varphi$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}\right)$$

Wenn zwei Vektoren senkrecht sind $\left(\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}\right)$



$$\bar{x}\cdot\bar{y} = 0$$

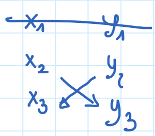
KREUZPRODUKT ODER VEKTORPRODUKT

NUR $\mathbb{R}^3$ DEFINIERT

$$V \times V \longrightarrow V$$

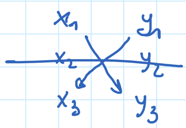
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2y_3 - x_3y_2\\x_3y_1 - x_1y_3\\x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix}$$

Erste Komponente



$x_2 y_3 - y_2 x_3$

Zweite Komponente



BEISPIEL

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 6 - 3\cdot 5\\3\cdot 4 - 1\cdot 6\\1\cdot 5 - 2\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

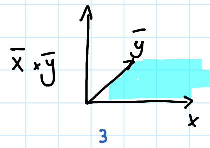
EIGENSCHAFTEN DES KREUZPRODUKTES

ES IST ANTISYMMETRISCH $\quad \bar{x}\times\bar{y} = -\bar{y}\times\bar{x}$

EIGENSCHAFTEN DES KREUZPRODUKTS

ES IST ANTISYMMETRISCH $\quad \bar{x} \times \bar{y} = -\bar{y} \times \bar{x}$

$\bar{x} \times \bar{y}$ steht senkrecht auf $\bar{x}$ und $\bar{y}$



$$\bar{x} \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) = 0$$

$$\bar{y} \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) = 0$$

$i = 1 \quad z_1 = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{1j1} x_j y_1 + \varepsilon_{1j2} x_j y_2 + \varepsilon_{1j3} x_j y_3$

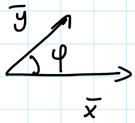
$= \cancel{\varepsilon_{111}} x_1 y_1 + \cancel{\varepsilon_{112}} x_1 y_2 + \cancel{\varepsilon_{113}} x_1 y_3 +$

$\cancel{\varepsilon_{121}} x_2 y_1 + \cancel{\varepsilon_{122}} x_2 y_2 + \varepsilon_{123} x_2 y_3 +$

$\cancel{\varepsilon_{131}} x_3 y_1 + \varepsilon_{132} x_3 y_2 + \cancel{\varepsilon_{133}} x_3 y_3$

$= x_2 y_3 - x_3 y_2$

Betrag $\quad |\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}||\bar{y}| \sin\varphi$



$\bar{z} = \bar{x} \times \bar{y} \qquad z_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, x_j y_k$

ε_{ijk} ANTISYMMETRISCHE TENSOR $\leftrightarrow$ LEVI-CIVITA TENSOR

Definition Levi-Civita Tensor

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

QUIZ $\quad \varepsilon_{132} = ? \qquad \varepsilon_{112} = 0$

A) -1
B) 0
C) 1
D) 6

PERMUTATION

Eine Permutation $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ nennt man GERADE (UNGERADE) wenn man sie durch eine gerade (UNGERADE) Anzahl von paarweisen Vertauschungen aus $(1, 2, \ldots, n)$ erzeugen kann.

$(3, 2, 1, 5, 4) \qquad (1, 2, 3, 4, 5)$

$(1, 2, 3, 5, 4)$ zwei paarweise Vertauschungen

$(1, 2, 3, 4, 5)$

$\Rightarrow (3, 2, 1, 5, 4)$ ist eine gerade Permutation von $(1, 2, 3, 4, 5)$

$(1, 5, 3, 4, 2)$ 1 paarweise permutation $\quad (1, 2, 3, 4, 5) \quad$ Ungerade

KRONECKER-DELTA SYMBOL

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$