

Aufgabe 1: Eigenschaften reeller Funktionen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen, ob sie beschränkt und/oder monoton sind:

- | | | | |
|-----|-------------------|-----|--------------------------|
| (a) | $f(x) = x^2$ | (d) | $f(x) = \sin(x^2)$ |
| (b) | $f(x) = e^{-x^2}$ | (e) | $f(x) = e^x + e^{-x}$ |
| (c) | $f(x) = \sin(x)$ | (f) | $f(x) = x \log(x^2 + 1)$ |

Aufgabe 2: Grenzwerte

Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Funktionen:

- | | | | |
|-----|---|-----|---|
| (a) | $\lim_{x \rightarrow 0} x^2$ | (d) | $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{x^2}}$ |
| (b) | $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x)$ | | |
| (c) | $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(x)$ | (e) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ |

Aufgabe 3: Trigonometrische Funktionen

Zeichnen Sie folgende Funktionen und bestimmen Sie Nullstellen und Periode:

- | | | | |
|-----|-----------------------------------|-----|-----------------|
| (a) | $2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ | (c) | $\cos(8\pi x)$ |
| (b) | $\sin(3x + \pi)$ | (d) | $\tan(x + \pi)$ |

Aufgabe 4: Exponentialfunktion und Logarithmus

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich:

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| (a) | $\ln(x^a) + \ln(x^b)$ | (d) | $\ln(a^7) + \ln\left(\frac{1}{a^7}\right)$ |
| (b) | $\ln(a^x) + \ln(b^x)$ | (e) | $\log_2(16)$ |
| (c) | $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^6}}\right)$ | (f) | $2 \ln(e^3) + \ln\left(\frac{1}{e^6}\right)$ |

Aufgabe 5: Polynomfunktionen

Zeichnen Sie die folgenden Funktionen, bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich, die Nullstellen und das Symmetrieverhalten (Bonus: Versuchen Sie durch ableiten und andere geschickte Rechnungen, die Funktionen ohne einen Plotter zu zeichnen. Finden Sie gegebenenfalls die Symmetrieachse):

- | | | | |
|-----|---------------------------------|-----|--------------------------------|
| (a) | $f(x) = x^2 + 2x + 1$ | (c) | $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)}$ |
| (b) | $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ | | |

Aufgabe 6: Polynomdivision

Führen Sie jeweils Polynomdivisionen so weit wie möglich durch:

(a)
$$\frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{3 - x}$$

(b)
$$\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1}$$

(c)
$$\frac{3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

(d)
$$\frac{x^5 + 4x^4 - 9x^3 - 40x^2 - 4x + 48}{x^3 - 13x + 12}$$