

Aufgabe 1: Zahlenmengen

- (a) Geben Sie alle natürlichen Zahlen x an, die $x < 6$ und $x \geq 3$ erfüllen. Wie viele gerade Zahlen sind darunter?
- (b) Geben Sie eine rationale Zahl an, die keine ganze Zahl ist.
- (c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die keine rationale Zahl ist.

Aufgabe 2: Elemente in Mengen

Schreiben Sie alle Elemente auf, die zur angegebenen Menge gehören:

- | | |
|---|---|
| (a) $M_1 = \{x \in \mathbb{N} x < 6\} =$ | (d) $M_4 = \{x \in \mathbb{Q} x^2 = 1\} =$ |
| (b) $M_2 = \{x \in \mathbb{Z} x^2 < 6\} =$ | (e) $M_5 = \{x \in \mathbb{Z} 500^x = 1\} =$ |
| (c) $M_3 = \{x \in \mathbb{Z} \sqrt{x} = 4\} =$ | (f) $M_7 = \{x \in \mathbb{N} x^2 \leq 6\} =$ |

Aufgabe 3: Bruchrechnung

Vereinfachen Sie jeden der folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

- | | |
|--|--|
| (a) $\frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{6}}$ | (d) $\frac{\sqrt{36}}{\frac{144}{12}} + \frac{3^2}{3^3}$ |
| (b) $\frac{\frac{1}{2} - (2 + \frac{1}{2}) : (-1 - \frac{1}{4})}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}}$ | (e) $\frac{8 (56 + 168x)^3}{56 (7 + 21x)^4}$ |
| (c) $\frac{a^2 - b^2}{a + b} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{b}}}$ | (f) $\left[-2^2 : \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2\right]^2 : \left(-\frac{4}{5}\right)^4 - \left[-5 : \left(1 + \frac{2}{3}\right)\right]^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$ |

Aufgabe 4: Potenzen

Vereinfachen Sie die folgenden Potenzen und Logarithmen so weit wie möglich:

- | | | |
|-----------------------------------|---|--|
| (a) $\frac{x^{-1}x^4y^5}{y^3x^2}$ | (d) $(x^a y^{-a})^{\frac{1}{n+1}}$ | (f) $\log_a b + \log_a c - \log_b b^c$ |
| (b) $(x + y)^a z^a$ | (e) $\left[\frac{1}{\left(\frac{x^3 y^{-2}}{y^{-3} x^2}\right)^2}\right]^{-1} - (xy)^2$ | (g) $\log_b a \cdot \log_a b$ |
| (c) $x^a y^a z^{-a}$ | | |

Aufgabe 5: Binomischer Lehrsatz

Binomischer Lehrsatz: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Gegeben sei folgender Ausdruck:

$$(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$$

- (a) Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz, um obigen Ausdruck in Summenform zu bringen

- (b) Untersuchen Sie, ob daraus für bestimmte Summenglieder eine allgemeine Aussage getroffen werden kann (Stichwort: gerade und ungerade Summanden)

Aufgabe 6: Induktionsbeweise

Beweisen Sie folgende Aussagen mittels vollständiger Induktion:

Hinweis zu (c): Additionstheorem für \cos

Hinweis zu (d): kleiner Gauß

(a)
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(c)

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \forall n \geq 1$$

(d)

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{j=1}^n j \right)^2$$

(b)
$$(n+1)! > n(n+1) \quad \forall n \geq 4$$