

MATRIZEN

Definition: Rechteckige Anordnung

a_{ij} heißen Elementen/
Komponenten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

n Zeilen und m Spalten

$(n \times m)$ -Matrix

QUADRATISCHE Matrix $n=m$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

EINHEITSMATRIX

→ quadratisch $n \times n$

$$a_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

DIAGONALMATRIX

→ quadratisch $n \times n$

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

OBERE DREIECKSMATRIX

→ quadratisch $n \times n$

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ADDITION VON MATRIZEN

Seien A und B zwei $(n \times m)$ -Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

$A \quad + \quad B$

Einzelne Komponenten summieren

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

MULTIPLIKATION MIT SKALAREN

$$\lambda A \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

BEISPIEL $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

BEISPIEL $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

DER VEKTORRAUM DER $(n \times m)$ MATRIZEN

• Mit dieser Addition und dieser skalaren Multiplikation bilden die $(n \times m)$ Matrizen einen Vektorraum.

• Die Dimension dieses Vektorraumes ist $n \cdot m$

• Eine Basis ist gegeben durch die Matrizen $e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $i=1, \dots, n$
 $j=1, \dots, m$

BEISPIEL $m=2$; $n=2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad i=1,2 \quad j=1,2 \quad e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MULTIPLIKATION

A $(m \times k)$ -Matrix

B $(k \times n)$ -Matrix

C $m \times n$ Dimension

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

wobei $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$.

Regel Zeile $\times$ Spalte

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1k} \cdot b_{k1}$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \dots + a_{1k} \cdot b_{k2}$$

BEISPIEL $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$

QUIZ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{2 \times 1} =$$

A) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix} = 11$

SPALTENVEKTOREN UND ZEILENVEKTOREN ALS MATRIZEN

SPALTENVEKTOREN UND ZEILENVEKTOREN ALS MATRIZEN

Ein m -dimensionaler Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ kann als eine $(m \times 1)$ -Matrix aufgefasst werden.

Ebenso kann ein m -dimensionaler Zeilenvektor $(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ als eine $(1 \times m)$ -Matrix betrachtet werden.

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Setzt man

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}_{m \times m}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{m \times 1}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

so läßt sich das lineare Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mm}x_m = b_m$$

auch wie folgt schreiben $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$

QUADRATISCHE MATRIZEN

$n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

BEISPIEL

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = 1 + 6 + 11 + 16 = 34$$

SPUR

$$\text{Tr}_A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Summe von allen diagonalen Elementen

RECHENREGELN

A, B $(n \times n)$ -Matrizen, λ ein Skalar

$$\text{Tr}(A+B) = \text{Tr} A + \text{Tr} B$$

$$\text{Tr}(\lambda \cdot A) = \lambda \text{Tr} A$$

QUIZ

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

A) $\sqrt{3}$

B) 3

C) 6

D) 45

DETERMINANTE

Definition

Quadratische Matrizen

(1×1) -Matrix

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$

(2×2) -Matrizen

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$n \times n$ -Matrizen

$$\det A = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n}$$

$n \times n$ -Matrixen $\det A = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n}$

wobei $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ eine gerade Permutation von } (1 2 3 \dots n) \\ -1 & \text{für } (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ eine ungerade Permutation von } (1 2 3 \dots n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

DIAGONAL MATRIX

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

1x1 DIMENSION $\det \lambda_1 = \lambda_1$

2x2 " $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

BERECHNUNG DER DETERMINANTE

Zu einer $(n \times n)$ -Matrix A definieren wir zuerst $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix A_{ij} , die dadurch entsteht, dass man die i -te Zeile und j -te Spalte der Matrix A entfernt

Entwicklung nach der i -te Zeile: $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$

" " der j -te Spalte $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^4 (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

$$= (-1)^2 a_{11} \det A_{11} + (-1)^3 a_{12} \det A_{12} + (-1)^4 a_{13} \det A_{13} + (-1)^5 a_{14} \det A_{14}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 3 \det \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} = -3 (5 \cdot 11 - 7 \cdot 9) = 24$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

1 1
i

RECHENREGELN FÜR DIE DETERMINANTE

Seien A und B $(n \times n)$ -Matrizen, λ ein Skalar

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det A$$

QUIZ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

- A) 0
- B) 10
- C) 24
- D) -228

$$2. \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 42 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \dots$$

QUADRATISCHE MATRIZEN

Seien A, B $(n \times n)$ -Matrizen

$A \cdot B$ ist eine $n \times n$ -Matrix

Für $(n \times n)$ -Matrizen ist die Matrixmultiplikation also abgeschlossen

Neutrales Element bezüglich der Matrixmultiplikation

Einheitsmatrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot A = A$

DIE INVERSE MATRIX A^{-1}

Unter welcher Bedingung existiert auch ein inverses Element?

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1} \quad \mathbb{1}$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$\det A \neq 0$ hinreichende Bedingung für die Existenz des Inversen, auch notwendige Bedingung

THEOREM A^{-1} existiert genau dann, wenn $\det A \neq 0$

Die Menge aller quadratischen $(n \times n)$ Matrizen mit $\det A \neq 0$ bildet bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix mit $\det A \neq 0$. Gesucht ist eine $(n \times n)$ Matrix X so dass

$$A \cdot X = \mathbb{1} \quad \begin{matrix} \text{j-te Spalte} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1j} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{2j} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{nj} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \dots + a_{1n}x_{nj} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \dots + a_{jn}x_{nj} = 1$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \dots + a_{nn}x_{nj} = 0$$

Gleichungssystem mit Unbekannten $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{j-te Spalte} \\ \text{Gauß'sches} \\ \text{Algorithmus} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

BEISPIEL

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$A^{-1}?$

$A^{-1} = X$

A^{-1}

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}}$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$