Dienstag, 25. März 2025 11:46

KOMPLEXE ZAHLEN

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ reelle Lösung

$x^2 = -2$ hat keine reelle Lösung

DEFINITION

Man definiert die imaginäre Einheit i als die Lösung der Gleichung

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$\mathbb{C}$ Menge der komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$z = x + iy$ $z \in \mathbb{C}$

REALTEIL $x = \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\{z\}$

IMAGINÄRTEIL $y = \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\{z\}$

BEISPIELE

$z = 3 + 5i$

$\mathrm{Re}\{z\} = 3$

$\mathrm{Im}\{z\} = 5$

KONJUGATION

Die zu $z = x + iy$ KONJUGIERT KOMPLEXE ZAHL ist

$$z^* = x - iy$$

BEISPIEL $(3+5i)^* = 3 - 5i$

ADDITION UND MULTIPLIKATION VON KOMPLEXE ZAHLEN

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$\overset{!}{=} (x_1 x_2 + i y_1 x_2 + i x_1 y_2 + i^2 y_1 y_2)$$

$$\overset{!}{=} (x_1 x_2 + i y_1 x_2 + i x_1 y_2 - y_1 y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

BEISPIEL $(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1+3) + i(2+4) = 4 + 6i$

$(1 + 2i) \cdot (3 + 4i) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + i(1 \cdot 4 + 3 \cdot 2) = -5 + i10 = -5 + 10i$

QUIZ $z_1 = 7+13i$ und $z_2 = 2-5i$

$z_1 + z_2 =$

A) $17i$
B) $9+8i$
C) $9+18i$
D) $5-18i$

QUIZ $z_1 = 5+9i$ $z_2 = 2i$

$z_1 \cdot z_2 = ?$

A) $10+18i$
B) $10-18i$
C) $-18+10i$
D) $18+10i$

SUBTRAKTION UND DIVISION

$z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 - z_2 = (x_1+iy_1) - (x_2+iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)} \cdot \frac{(x_2-iy_2)}{(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{(y_1x_2-x_1y_2)}{(x_2^2+y_2^2)}$$

BEISPIELE $(1+2i)-(3+4i) = -2-2i$

$$\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)}{(3+4i)} \cdot \frac{(3-4i)}{(3-4i)} = \frac{(3+8)+i(6-4)}{9+16} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$$

QUIZ $z_1 = 6+8i$ $z_2 = 2i$

$i^2 = -1$

$\frac{z_1}{z_2} = ?$

A) 10
B) $3+4i$
C) $4-3i$
D) $4+3i$

$$\frac{(6+8i)}{(2i)} \cdot \frac{(-2i)}{(-2i)} = \frac{-12i-16i^2}{-4i^2} = \frac{16-12i}{4} = 4-3i$$

POLYNOME

DEFINITION

Ein Polynom vom Grad n ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{i=0}^{m} c_i x^i = c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m$$

$$\stackrel{!}{=} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m$$

wobei $x^0 = 1$

- Die Summe und das Produkt zweier Polynome sind wiederum Polynome.

- $\sum_{i=0}^{m} c_i x^i = 0$ Algebraische Gleichung mit Grad m

$a x + b = 0$ Grad 1

$a x^2 + b x + c = 0$ Grad 2

→ Lösungen sind im allgemeinem Fall komplex.

NULLSTELLEN EINES POLYNOMS

THEOREM

Es seien $c_m, c_{m-1}, \dots, c_1, c_0 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Gleichung

$$c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + c_0 = 0$$

$z \in \mathbb{C}$

Diese Gleichung hat für die Unbekannte Variable $z \in \mathbb{C}$ genau m Lösungen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

BEISPIEL

$$(z-4)(z-5)^2 = 0 \qquad (z-4)\cdot(z^2 - 10z + 25) = z^3 + \dots -$$

$z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4$ Vielfachheit 1

$(z-5)^2 = 0 \qquad (z-5)\cdot(z-5) = 0 \qquad z = 5$ Vielfachheit 2

Grad 3 $\Rightarrow$ 3 Lösungen

BEISPIEL

$$2z^2 - 8z + 26 = 0$$

Erinnerung Reel $a x^2 + b x + c = 0$

$D > 0$ ansonsten keine Lösung $\in \mathbb{R}$

$$D = b^2 - 4ac = -144$$
$$\stackrel{!}{=} 64 - 4 \cdot 2 \cdot 26$$

$i^2 = -1$

$$z_{1/2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{-144}\right) = \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{(-1)\,12^2}\right) = \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{i^2 12^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(8 \pm 12i\right) = 2 \pm 3i$$

RECHENREGELN MIT KONJUGATION

$$(z^*)^* = z \qquad z = x + iy$$

- $\mathrm{Re}\{z\} = \frac{1}{2}(z + z^*) \qquad z^* = x - iy$

- $\mathrm{Re}\{z\} = \frac{1}{2}(z + z^*)$
- $\mathrm{Im}\{z\} = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

$z^* = x - iy$

$z + z^* = 2x + \cancel{iy} - \cancel{iy} \Rightarrow x = \mathrm{Re}\{z\} = \frac{1}{2}(z + z^*)$

$z - z^* = x + iy - (x - iy)$

$\overset{!}{=} \cancel{x} + iy - \cancel{x} + iy = 2iy$

$y = \mathrm{Im}\{z\} = \frac{(z - z^*)}{2i}$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

BETRAG EINER REELLEN ZAHL

$x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|3| = 3$

$|-3| = 3$

BETRAG EINER KOMPLEXEN ZAHL

$z = x + iy$

$z \cdot z^* = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$

DEFINITION

Als Betrag der komplexen Zahe z bezeichnet man

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

BEISPIEL $|3+5i| = \sqrt{(3+5i)(3-5i)} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

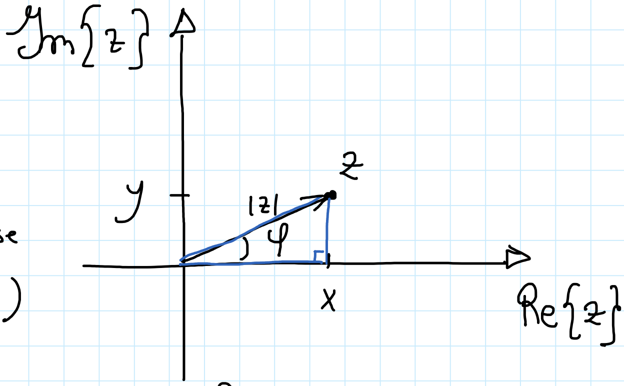
Polarkoordinaten (r, φ)

KOMPLEXE ZAHLEBENE

$z = x + iy$

$z = (x, y)$ Paar zweier reellen Zahlen

Reele Zahlen haben $\mathrm{Im}(z) = 0 \Rightarrow$ x- Achse



POLARDARSTELLUNG

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$|z| \cdot$ Betrag φ: Phase

$z = |z| \cdot \cos\varphi + i\,|z| \sin\varphi$

$$\begin{cases} x = |z| \cos\varphi \\ y = |z| \sin\varphi \end{cases}$$

$$z = |z| \cdot \cos\varphi + i|z| \sin\varphi$$
$$= x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{|z| \sin\varphi}{|z| \cos\varphi} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

MULTIPLIKATION UND DIVISION IN POLARFORM

$z_1 \rightarrow |z_1|, \varphi_1$ $\quad$ $z_2 \rightarrow |z_2|, \varphi_2$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i \sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

DIE FORMEL VON MOIVRE

Aus $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$

folgt $\boxed{z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}$

DIE FORMEL VON EULER

$$z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i \sin\varphi) \qquad \text{EXPONENTIAL DARSTELLUNG}$$

$$z = |z| e^{i\varphi} \qquad \text{EXPONENTIAL DARSTELLUNG EINER KOMPLEXEN ZAHL}$$

MULTIPLIKATION UND DIVISION IN EXPONENTIAL DARSTELLUNG

$z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$ $\qquad$ $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

QUIZ

$i^9 = ?$

A) $-i$

B) i

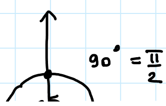
C) $9i$

D) $9+i$

$$i^9 = \underbrace{i \cdot i}_{} \cdot \underbrace{i \cdot i}_{} \cdot \underbrace{i \cdot i}_{} \cdot \underbrace{i \cdot i}_{} \cdot i$$
$$= i^2 \; i^2 \; i^2 \; i^2 \; i$$
$$= (-1)(-1)(-1)(-1) \; i$$
$$= 1 \cdot i = i$$

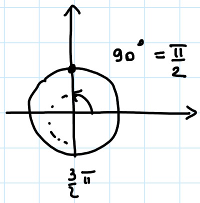
i IN POLAR FORM

$$|i| = \sqrt{i\,i^*} = \sqrt{i(-i)} = \sqrt{-i^2} = \sqrt{1} = 1$$



$$|i| = \sqrt{i\,i^*} = \sqrt{i(-i)} = \sqrt{-i^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$i = 0 + i\,1 \qquad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$



$$z = x + iy$$
$$= \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= 0 + i\,1$$

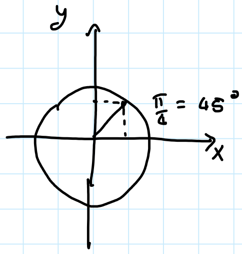
POTENZEN VON i

$m \in \mathbb{Z}$ $\qquad i^m = \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$

$$i^0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$
$$i^1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$
$$i^2 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$
$$i^3 = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$
$$\vdots$$

QUIZ $\qquad \sqrt{i} = ? \qquad i^{1/2}$

A) -1
B) i
C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$
D) $-1+i$



$$\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}}$$
$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$i^{\frac{1}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$
$$(x^n)^m$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$