Übungsblatt 9
Theoretische Physik 3: QM WS2023/24

10.01.2024

Übung 0.

Wie viel Zeit hast du für die Bearbeitung dieser Hausaufgabe benötigt?

Übung 1. Eigenfunktionen von Drehimpulsoperatoren(45 points)

In der letzten Vorlesung von Kapitel 4 haben Sie gezeigt, dass der Drehimpuls in Kugelkoordinaten wie folgt geschrieben wird

$$\vec{L} = -i\hbar \left(\hat{e}_\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right).$$

Davon ausgehend werden wir zeigen, dass die Funktionen, die wir zunächst als f_l^m bezeichnet haben, den sphärischen Harmonischen (aka Kugelflächenfunktionen) entsprechen.

a) *(10 p.)* Drücke die Einheitsvektoren in Bezug auf die kartesischen Koordinaten $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ aus und lese $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ ab.

b) *(10 p.)* Konstruieren Sie L^2 aus den obigen Angaben.

c) *(25 p.)* Schreiben Sie die Differentialgleichungen auf, die den Eigenwertgleichungen entsprechen

$$\hat{L}_z f_l^m(\theta,\phi) = \hbar m f_l^m(\theta,\phi)$$
$$\hat{L}^2 f_l^m(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1) f_l^m(\theta,\phi)$$

und zeigen dann, dass $f_l^m(\theta,\phi) \equiv Y_{lm}(\theta,\phi)$.
Hinweis: Verwenden Sie $f_l^m(\theta,\phi) = g(\theta)h(\phi)$. Lösen Sie, um $h(\phi)$ zu finden und zeigen Sie, dass $g(\theta)$ die folgende Gleichung erfüllt,

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dg}{d\theta}\right) + [l(l+1)\sin^2\theta - m^2]g = 0.$$

Das ist genau die gleiche Gleichung, die der θ-abhängige Teil von $Y_{lm}(\theta,\phi)$ erfüllen muss, also ist deine Aufgabe damit erledigt.

Übung 2. Drehimpulsoperator (55 Punkte)

a) *(15 p.)* Zeige, dass $L_\pm Y_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\, Y_l^{m\pm 1}$.
Tipp: beachte die Norm von $L_\pm Y_l^m$.

b) *(15 p.)* Zeige das für Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$, folgendes gilt:

$$\langle \hat{L}_x \rangle = \langle \hat{L}_y \rangle = 0; \quad \langle \hat{L}_x^2 \rangle = \langle \hat{L}_y^2 \rangle; \quad \langle \hat{L}_x \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_x \rangle = 0$$

Tipp: betrachte $\langle \hat{L}_\pm \rangle$ und $\langle \hat{L}_\pm^2 \rangle$.

c) *(25 p.)* Im Zustand ψ_{lm} mit bestimmtem Drehimpuls l und dessen z-Komponente m, finde die Mittelwerte $\langle \hat{L}_x^2 \rangle$, $\langle \hat{L}_y^2 \rangle$ sowie die Mittelwerte $\langle \hat{L}_{\tilde{z}} \rangle$ und $\langle \hat{L}_{\tilde{z}}^2 \rangle$ in Richtung von $\tilde{z}$-Achse welche einen Winkel von α mit der z-Achse einschließt.
Tipp: benutze $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}^2$.

(Bonus) **Übung 3. Entartete Quantenzahlen (15 points)**

Verifiziere oder falsifiziere folgende Aussagen:

a) *(10 p.)* Wenn $[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] = \vec{0}$, dann hängen die Energieniveaus nicht von m ab (d.h. die Eigenwerten der Projektion einer der Komponenten des Drehimpulses $\hat{\vec{L}}$).

b) *(5 p.)* Wenn $[\hat{H},\ \hat{L}^2] = 0$, hängen die Energieniveaus nicht von l ab.