# Übungsblatt 10
# Theoretische Physik 3: QM WS2023/24

17.01.2024

## Übung 0.

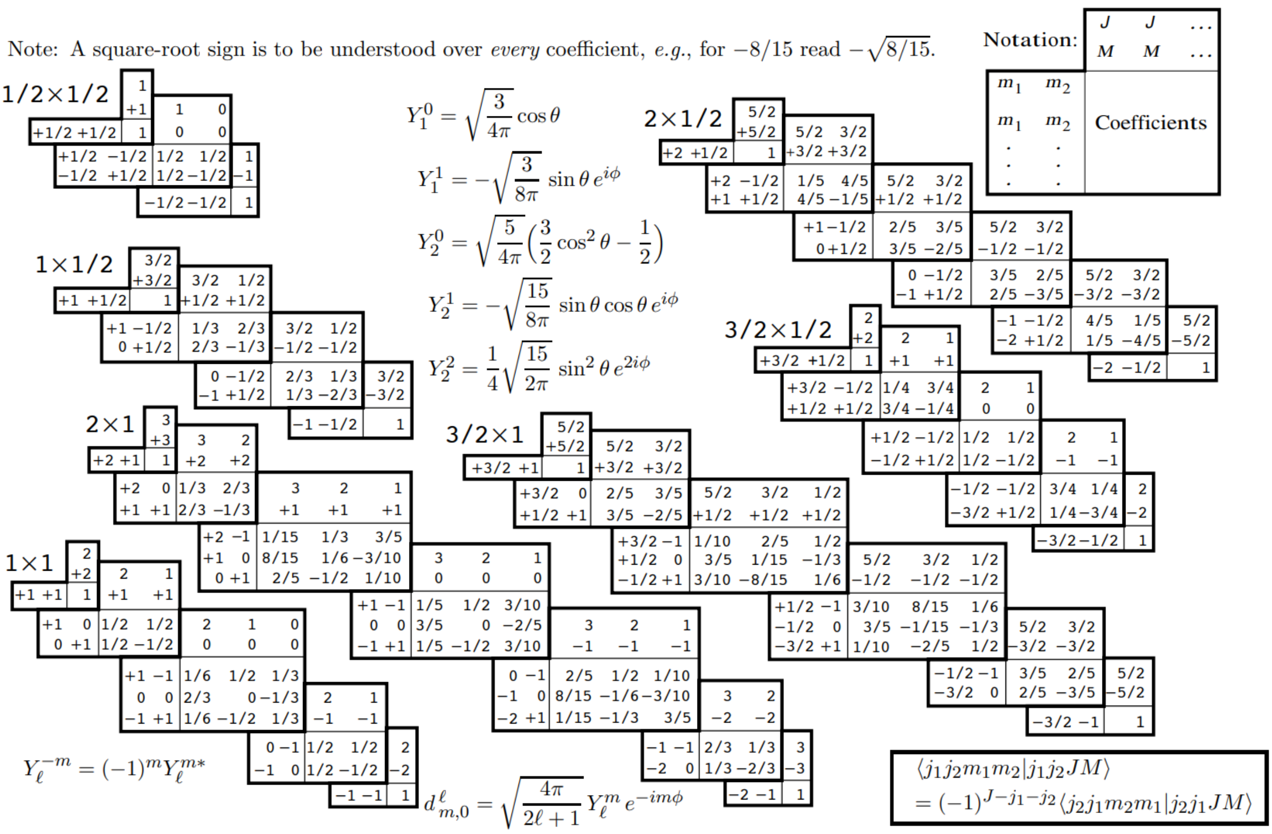
Wie viel Zeit hast du für die Bearbeitung dieser Hausaufgabe benötigt?

## Übung 1. Clebsch-Gordan-Koeffizienten (40 Punkte)

In dieser ersten Übung werden wir üben, mit Hilfe von Clebsch-Gordan-Tabellen zwei Drehimpulse $j_1$ und $j_2$ zu koppeln. Es sei daran erinnert, dass die gekoppelten Zustände, die durch den Gesamtdrehimpuls $J$ und seine Projektion $M$ charakterisiert sind, über die Vollständigkeitsrelation in der entkoppelten Basis erweitert werden können:

$$|JM\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1| \langle j_2 m_2 | JM\rangle$$

Die Expansionskoeffizienten, $(\langle j_1 m_1| \langle j_2 m_2|)\,|JM\rangle$, sind die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die in der folgenden Tabelle zu finden sind:



a) *(25 p.)* Notiere alle mögliche Zustände $|JM\rangle$ in der Basis $|j_1 m_1\rangle\,|j_2 m_2\rangle$ für die zusammengesetzten Systeme $\frac{1}{2}\otimes 1$ and $1\otimes 1$ (Das Symbol $\otimes$ steht für die Kopplung von zwei Drehimpulsen).

b) *(15 p.)* Überprüfe explizit, dass die Zerlegungen der Zustände $|\frac{5}{2},+\frac{1}{2}\rangle$ in der Basis $|\frac{1}{2}m_1\rangle\,|1m_2\rangle\,|1m_3\rangle$ die man für $(\frac{1}{2}\otimes 1)\otimes 1$ und $\frac{1}{2}\otimes(1\otimes 1)$ erhält, die gleichen sind.

## Übung 2. Spin 1 Matrizen (30 Punkte)

a) *(15 p.)* Bestimme die Spin-Matrizen $S_x, S_y, S_z$ in der Basis $|s, s_z\rangle$ für $s = 1$.

b) *(15 p.)* Finde die Eigenwerte und normiere die Eigenvektoren von $S_x$ und $S_y$ in dieser Basis.
*Hinweis*: Die Beziehung $S_\pm|s,s_z\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)-s_z(s_z\pm 1)}|s,s_z\pm 1\rangle$ könnte nützlich sein.

## Übung 3. Spin Operatoren (25 Punkte)

a) *(15 p.)* Stelle eine beliebige Funktion f mit dem Argument $a+\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}$ als lineare Funktion wie folgt dar:

$$f\,(a+\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}) = A + \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}$$

Schreibe die Kooeffizienten $A$ und $\mathbf{B}$ explizit ($\boldsymbol{\sigma}$ ist der Vektor der Pauli matrizen).

*Hint*: verwende die Invarianz des Problems gegenüber Rotation und wende es auf die Eigenzustände der $\sigma_3$ matrix an.

b) *(10 p.)* Eine der wichtigsten Eigenschaften der Pauli Matrizen ist die Expansion der folgenden exponentiellen Form:

$$e^{i\alpha(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})} = I_2\cos\alpha + i\,(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\sin\alpha$$

In welcher $I_2$ für die $2\times 2$ Identität steht und $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor in einer beliebigen Raumrichtung ist. Verwende das Ergebnis aus a).

## *(Bonus)* Übung 4. Quantenverschränkung (20 Punkte)

Betrachten wir das System mit zwei Spins im Zustand $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle S_{1z}S_{2z}\rangle$, $\langle S_{2z}\rangle$ und $\langle S_{2z}\rangle$ in diesem Zustand. Machen Sie dasselbe für den Zustand $|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$. Geben Sie eine Interpretation der Ergebnisse in Bezug auf die Verschränkung an.