Probeklausur
Theoretische Physik 3: QM WS2023/2024

31.01.2024

Aufgabe 1. Allgemeine Fragen (20 Punkte + 10 Bonus)

1.1. *(5 p.)* Betrachte die Grundzustandswellenfunktion eines harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung

$$\langle x|\psi_0\rangle = A_0\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Nutze

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar}px} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

und berechne $\langle p|\psi_0\rangle$.

1.2. *(5 p.)* Betrachte den Operator $\hat{T}(a) \equiv e^{\frac{ia}{\hbar}\hat{p}}$, wobei $\hat{p}$ der Impulsoperator und a ein reeller Parameter ist.

a) Ist der Operator eine Observable? Warum?

b) Zeige, dass $\hat{T}(a)\,\psi(x) = \psi(x+a)$.

1.3. *(5 p.)* Nehme an, dass $\hat{H}$ der *zeitunabhängige* Hamiltonian ist.

a) Zeige, dass der Operator $\hat{U}(t-t_0) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}$ unitär ist.

b) Zeige, dass sich die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung wie folgt ergibt

$$\Psi(x,t) = \hat{U}(t-t_0)\Psi(x,t_0),$$

wobei $\Psi(x,t_0)$ eine gegebene Wellenfunktion des Systems zur Zeit t_0 ist.

1.4. *(5 p.)* Betrachte zwei Observablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$.
$\hat{A}$ besitzt zwei normierte Eigenzustände $|a_1\rangle$ und $|a_2\rangle$, mit den zugehörigen Eigenwerten a_1 beziehungsweise a_2.
$\hat{B}$ besitzt zwei normierte Eigenzustände $|b_1\rangle$ und $|b_2\rangle$, mit den zugehörigen Eigenwerten b_1 beziehungsweise b_2.
Nehme an, dass die Eigenzustände wie folgt zusammenhängen

$$|a_1\rangle = \frac{3}{5}\,|b_1\rangle + \frac{4}{5}\,|b_2\rangle \qquad |a_2\rangle = \frac{4}{5}\,|b_1\rangle - \frac{3}{5}\,|b_2\rangle\,.$$

a) Die Messung der Observable $\hat{A}$ ergibt den Wert a_1. In welchem Zustand befindet sich das System (direkt) nach der Messung?

b) Was sind die möglichen Messergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten für eine nachfolgende Messung von $\hat{B}$?

c) Direkt nach der Messung von $\hat{B}$ wird $\hat{A}$ erneut bestimmt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit a_1 zu erhalten?

1.5. *(Bonus 10 p.) Eigenfunktionen und Entartungen.*

a) *(2 p.)* Was ist der Entartungsgrad für die Energie eines freien Teilchens in einer Dimension?

b) *(3 p.)* Ist der Grundzustand eines unendlichen Potentialtopfes eine Impulseigenfunktion? Falls ja, was ist der Impuls des Zustands? Falls nicht, warum nicht?

c) *(5 p.)* Nutze die Schrödingergleichung um zu zeigen, dass in einer Dimension keine entarteten gebundenen Zustände existieren.

Aufgabe 2. (25 + 5 Punkte). Radiale Wellenfunktion des Yukawa Potentials.

Ein 3-dimensionales realistisches Model der starken Wechselwirkung, welche im Atomkern die Nukleonen (Protonen und Neutronen) zusammenhält, ist das attraktive Zentralpotential vom Yukawa Typ (nach seinem Erfinder H. Yukawa):

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-r/a}}{r/a}, \tag{1}$$

wobei $V_0 > 0$ die Stärke der Wechselwirkung beschreibt und der Parameter a (mit Einheit einer Länge) ein Maß für die Reichweite der Wechselwirkung (normalerweise in Größenordnung von 1 - 2 fm, mit 1 fm $= 10^{-15}$ m) liefert. Betrachte zwei Nukleonen, welche sich in einem Zustand mit Drehimpuls $l = 0$ umeinander bewegen. Die Wellenfunktion, welche die relative Bewegung der beiden Nukleonen beschreibt, erfüllt die Schrödingergleichung mit Massenparameter M, welcher der reduzierten Masse des zwei-Nukleonen Systems entspricht. Um die radiale Wellenfunktion zu bestimmen, nutze den folgenden Ansatz:

$$R(r) = Ce^{-\alpha r}, \tag{2}$$

wobei die Parameter C und α im folgenden bestimmt werden sollen.

a) *(5 p.)* Bestimme den Parameter C (als Funktion von α) aus der Normierungsbedingung für R.

b) *(10 p.)* Zeige, dass die mittlere kinetische Energie im obigen Zustand durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\langle T \rangle = \frac{\hbar^2}{2M}\alpha^2. \tag{3}$$

Hinweis: Der Laplaceoperator nimmt in Kugelkoordinaten die folgende Form an:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \tag{4}$$

c) *(5 p.)* Zeige, dass die mittlere potentielle Energie im obigen Zustand durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\langle V \rangle = -V_0 \frac{4a^3\alpha^3}{(1+2a\alpha)^2}. \tag{5}$$

d) *(5 p.)* Der Grundzustand minimiert die Gesamtenergie. Um diesen Fakt auszunutzen, befolge folgende Schritte.
Führe zunächst die dimensionslose Variable $p \equiv 2a\alpha$ ein und drücke die mittlere Gesamtenergie in p anstatt in α aus.
Nimm nun an, p_0 sei der Wert des Parameters p, welcher die Gesamtenergie minimiert. Bestimme daraus die Bedingung für den Grundzustand und drücke hiermit a^2 als Funktion von p_0 aus.
Schreibe zum Schluss die Grundzustandsenergie als Funktion von *ausschließlich* V_0 und p_0.

e) *(Bonus 5 p.)* Was ist die Bedingung an p_0, um einen gebundenen Zustand zu haben? Was bedeutet diese Bedingung physikalisch für a (Reichweite des Potentials) und $1/\alpha$ (Reichweite der Wellenfunktion)?

Aufgabe 3. Halb-harmonischer Oszillator (30 Punkte + 5 Bonus)

Betrachte ein Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension in einem *"halb"*-harmonischen Potential $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0; \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

bewegt.

a) *(5 p.)* Stelle für $x \geq 0$ die *stationäre* Schrödingergleichung auf. Nutze dabei die dimensionslosen Grösen

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}.$$

b) *(5 p.)* Zeige, dass das asymptotische Verhalten der Lösung für gro"se y durch $e^{-y^2/2}$ gegeben ist.

c) *(8 p.)* Durch Separation des asymptotischen Verhaltens für $y \to \infty$, definieren wir

$$\psi(y) = h(y)e^{-y^2/2}.$$

Bestimme die Gleichung für $h(y)$, $y \geq 0$.

d) *(12 p.)* Die Eigenfunktionen des Hamiltonian des *regulären* quantenmechanischen harmonischen Oszillators lassen sich bekannterweise durch Hermitesche Polynome ausdrücken:

$$\psi_n(y) \propto H_n(y)e^{-y^2/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

wobei die Hermiteschen Polynome $H_n(y)$ die folgende Gleichung erfüllen

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

und gleichwertig durch

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{\partial^n}{\partial y^n} e^{-y^2}.$$

definiert werden können. Bestimme das Spektrum für den Fall des gegebenen *"halb"*-harmonischen Potentials.

e) *(Bonus 5 p.)* Die Hermiteschen Polynome sind normiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, H_n(y)H_m(y)e^{-y^2} = 2^n n! \sqrt{\pi}\delta_{nm}.$$

Was sind die normierten Wellenfunktionen des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes im Fall des gegebenen *"halb"*-harmonischen Potentials?

Aufgabe 4. Hyperfeinstruktur-Aufspaltung (25 Punkte)

Das Elektron und das Proton sind beides magnetische Dipole mit den magnetischen Momenten

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_e &= -g_e \frac{e}{2m_e}\vec{\mathbf{s}}_e\,, \quad g_e = 2\,, \\ \vec{\mu}_p &= +g_p \frac{e}{2m_p}\vec{\mathbf{s}}_p\,, \quad g_p = 5.59\,. \end{aligned}$$

Wie im klassischen Elektromagnetismus, wird das Magnetfeld des Protons von einem punktförmigen Dipol beschrieben als

$$\vec{\mathbf{B}}_p = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\vec{\mu}_p \cdot \vec{\mathbf{e}}_r)\vec{\mathbf{e}}_r - \vec{\mu}_p\right] + \frac{2\mu_0}{3}\delta^{(3)}(\vec{\mathbf{r}})\vec{\mu}_p\,,$$

mit $\vec{\mathbf{e}}_r = \vec{\mathbf{r}}/r$.

Das magnetische Dipolmoment des Elektrons $\vec{\mu}_e$ wechselwirkt mit dem vom Proton erzeugten Magnetfeld. Der zugehörige Beitrag zum Hamiltonoperator ist

$$\hat{H} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{\mathbf{B}}_p \, .$$

Betrachte den $l = 0$ Zustand von Wasserstoff, sodass die Kopplung zwischen dem Proton und dem Magnetfeld durch die kreisförmige Bewegung des Elektrons nicht vorhanden ist. In diesem Fall beschreibt der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{g_p e^2}{m_p m_e} \frac{1}{r^3} \left[3(\vec{\mathbf{s}}_p \cdot \vec{\mathbf{e}}_r)(\vec{\mathbf{s}}_e \cdot \vec{\mathbf{e}}_r) - \vec{\mathbf{s}}_p \cdot \vec{\mathbf{s}}_e\right] + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3 m_p m_e} \vec{\mathbf{s}}_p \cdot \vec{\mathbf{s}}_e \delta^{(3)}(\vec{\mathbf{r}}) \, ,$$

vollständig die magnetische Dipolwechselwirkung des Protons und des Elektrons. Nach der Störungstheorie erster Ordnung ist die zugehörige Energieverschiebung

$$E = \langle \hat{H} \rangle = E_r + E_c \, ,$$

wo E_r der reguläre Beitrag und E_c der Kontaktbeitrag zugehörig zum ersten und zweiten Term im Hamiltonoperator sind.

a) *(2 p.)* Erkläre warum E_r für $l = 0$ verschwindet.

b) *(7 p.)* Zeige, dass die Energieverschiebung E_c in Störungstheorie erster Ordnung als

$$E_c = \frac{\mu_0 e^2 g_p}{3 m_e m_p} \frac{1}{2} (s^2 - s_e^2 - s_p^2) |\psi_{n00}(0)|^2,$$

berechnet wird, wo $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{s}}_e + \vec{\mathbf{s}}_p$ und ψ die Ortswellenfunktion von Wasserstoff ist.

c) *(2 p.)* Betrachte den Grundzustand. Wie viele Energieniveaus gibt es? Was ist die Entartung jedes Niveaus?

d) *(7 p.)* Leite die Energieverschiebungen für die Singlet und Triplet Grundzustände her. Berechne die numerischen Werte für die Hyperfeinaufspaltung zwischen den diesen Zuständen und die zugehörige Wellenlänge.

e) *(7 p.)* Vergleiche die Größenordnungen der Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands mit der des $n = 2$ Zustandes. Was ist der hauptsächliche Grund warum die Hyperfeinaufspaltung kleiner als die Feinaufspaltung ist? Schätze die Größenordnung ihres Verhältnisses ab.