Übungsblatt 8
Theoretische Physik 3: QM WS2023/24

20.12.2023

Übung 0.

Wie viel Zeit hast du für die Bearbeitung dieser Hausaufgabe benötigt?

Übung 1. Wasserstoffatom (30 Punkte + 10 Bonus)

Die normierten Wasserstoffwellenfunktionen sind:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = \frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[a(n+l)!]^3}}\, e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L^{2l+1}_{n-l-1}(\tfrac{2r}{na})\, Y_l^m(\theta,\phi)$$

Wobei $L^p_{q-p}(x)$ die zugehörigen Laguerre-Polynome sind und $Y_l^m(\theta,\phi)$ die Kugelflächenfunktionen sind.

a) *(10 p.)* Stelle dir vor, das Elektron befindet sich im Zustand $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_{nl}(r)$ es irgendwo zu finden?

b) *(20 p.)* Überprüfe explizit, dass $P_{nl}(r)$ für $n=3$ richtig auf Eins normalisiert ist.
Hinweis: benutze $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x}x^n = n!$.

c) *(10 p.) (Bonus)* Zeige, dass $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x}x^n = n!$.

Übung 2. (45 Punkte)

Um die Radialgleichung eines unendlichen sphärischen Potentialtopfes zu lösen, führen wir die sphärischen Bessel-Funktionen $j_l(x)$ der Ordnung l ein:

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l \frac{\sin x}{x}\,.$$

Eine sphärische Bessel-Funktion ist ein Spezialfall einer Bessel-Funktion $J_\alpha(x)$:

$$J_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}\,,$$

für halbzahlige α. Es gilt: $J_{n+1/2} = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\, j_n(x)$.

a) *(25 p.)* Benutze die Definition der Bessel-Funktionen, um $J_{1/2}$ und $J_{3/2}$ zu berechnen. Verifiziere an diesen Beispielen, dass die Relation zwischen $J_{l+1/2}$ und j_l korrekt ist.

Die sphärischen Bessel-Funktionen besitzen für $x \ll 1$ und $x \gg 1$ wohldefinierte Grenzwerte:

$$
\begin{aligned}
j_l(x) &\to \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l \qquad \text{für } x \ll 1 \\
j_l(x) &\to \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{(l+1)\pi}{2}\right) \qquad \text{für } x \gg 1
\end{aligned}
$$

b) *(10 p.)* Berechnen Sie die beiden Grenzwerte für j_0, j_1 und j_2 unter Verwendung der eingangs gegebenen Definition und bestätigen Sie das oben aufgeführte asymptotische Verhalten.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Formeln für $j_0,\ j_1$ und j_2. Verwenden Sie für die untere Grenze die ersten Terme der Taylor-Expansionen der trigonometrischen Funktionen und behalten Sie nur den niedrigsten Term ungleich Null im Endergebnis.

c) *(10 p.)* Berechne j_3 mithilfe der am Anfang gegebenen Definition.

Mathematische Tipps:

$$
\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
\Gamma(m+1/2) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi} \\
\int_0^{\pi} \sin^n(x) \mathrm{d}x &= \frac{\Gamma(1/2 + n/2)}{\Gamma(1 + n/2)} \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Übung 3. (25 Punkte + 20 Bonus)

Betrachte ein Teilchen in einem dreidimensionalen quadratischen Kasten mit Seitenl nge a und periodischen Randbedingungen:

$$
\begin{cases}
\Psi(r_i = a,\, t) = \Psi(r_i = 0,\, t), \\
\frac{\partial}{\partial r_i} \Psi(r_i = a,\, t) = \frac{\partial}{\partial r_i} \Psi(r_i = 0,\, t).
\end{cases}
$$

a) *(20 p.)* Löse die Schrödinger-Gleichung in kartesischen Koordinaten.
Hinweis: Separiere die Variablen als

$$\psi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

um das Problem auf eine Dimension zu reduzieren und löse es.

b) *(10 p.) (Bonus)* Bestimme das Energiespektrum.
Was sind die Entartungsgrade der vier niedrigsten Energiezustände?

c) *(10 p.) (Bonus)* Betrachte eine (fiktive) Verallgemeinerung des Problems auf *vier* räumliche Dimensionen.
Wie wäre das Spektrum mit dem Spektrum des isotropen harmonischen Oszillators zu vergleichen?
Hinweis: Es gibt den Vier-Quadrate-Satz von Lagrange, der lautet, dass jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadratzahlen geschrieben werden kann:

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ \exists\, i, j, k, l \in \mathbb{Z} :\ n = i^2 + j^2 + k^2 + l^2.$$