Übungsblatt 7
Theoretische Physik 3: QM WS2023/24

13.12.2023

Übung 0.

Wie viel Zeit hast du für die Bearbeitung dieser Hausaufgabe benötigt?

Übung 1. Laplace-Operator in sphärischen Koordinaten (40 Punkte)

a) *(15 p.)* Berechnung der Jakobi für Kugelkoordinaten und anschließende Berechnung des Volumenelements

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \; \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$$

b) *(20 p.)* Zeige, dass der Laplace-Operator $\Delta \equiv \boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in drei Dimensionen die Form:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

annimmt.

c) *(5 p.)* Zeige, dass der radiale Ausdruck geschrieben werden kann als:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r$$

Übung 2. Operatoren und Dirac Notation (60 Punkte)

a) *(5 p.)* Betrachte die Leiteroperatoren für das Problem des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Zeige, dass

$$\hat{a}_+ = (\hat{a}_-)^\dagger.$$

b) *(10 p.)* Zeige, dass für jede Observable $\hat{q}$ mit *nicht-entartetem* Spektrum gilt

$$\hat{q} = \sum_q q \left|q\right\rangle \left\langle q\right| ,$$

wobei $\hat{q}\left|q\right\rangle = q\left|q\right\rangle$ und im Fall eines kontinuierlichen Spektrums $\sum_q \to \int \mathrm{d}q$ gilt.
Hinweis: Da die Menge der Eigenfunktionen vollständig und orthonormal ist, kann die folgende Vollständigkeitsrelation genutzt werden:

$$\sum_q \left|q\right\rangle \left\langle q\right| = \hat{1}.$$

c) *(10 p.)* Wir wissen bereits aus der Vorlesung, dass die Eigenfunktionen des Impulsoperators gegeben sind durch:

$$\langle x|p\rangle \equiv f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar}px}.$$

Zeige nun, dass

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\,\langle p|\psi\rangle\,.$$

d) *(10 p.)* Zeige, dass

$$\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\,\phi^*(p)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right]\phi(p),$$

wobei

$$\phi(p) \equiv \langle p|\psi\rangle$$

e) *(10 p.)* Zeige, dass

$$\left\langle x\middle|\hat{p}\middle|x'\right\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x').$$

f) *(15 p.)* Erinnere dich an die Wellenfunktion des stationären Zustandes im unendlichen rechteckigen Potentialtopf

$$\langle x|n\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) & 0 < x < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne $\langle p|n\rangle$.