Übungsblatt 6
Theoretische Physik 3: QM WS2023/24

06.12.2023

Übung 0.

Wie viel Zeit hast du für die Bearbeitung dieser Hausaufgabe benötigt?

Übung 1. Energie-Zeit Unschärferelation (50 Punkte)

Gegeben sei ein Teilchen innerhalb eines unendlichen Potentialtopfs:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq l \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit der Anfangswellenfunktion als Überlapp des ersten und zweiten angeregten Eigenzustandes:

$$\Psi(x,0) = A\left(\Psi_2(x) + \Psi_3(x)\right)$$

a) *(40 p.)* Berechne σ_H, σ_x und $d\langle x\rangle/dt$.

Hinweis: Du solltest die folgenden Ausdrücke erhalten,

$$\begin{aligned} \sigma_H^2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{25\hbar^4\pi^4}{4m^2l^4} \\ \sigma_x^2 &= \frac{l^2}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{13}{36\pi^2} - \left(\frac{96}{25\pi^2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{(E_3 - E_2)\,t}{\hbar}\right)\right] \\ \frac{d\langle x\rangle}{dt} &= \frac{24\hbar}{5ml} \sin\left(\frac{(E_3 - E_2)\,t}{\hbar}\right). \end{aligned}$$

b) *(10 p.)* Überprüfe ob die Energie-Zeit Unschärferelation gilt.

Hinweis: Energie-Zeit Unschärferelation:

$$\sigma_H^2\sigma_x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{d\langle x\rangle}{dt}\right)^2.$$

Übung 2. Koheränte Zustände (20 Punkte + 10 bonus)

a) *(5 p.)* Zeige, dass die Eigenzustände $|\alpha\rangle$ des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$$

b) *(15 p.)* Der harmonische Oszillator Hamiltonian kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\hat{E} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right); \quad \hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

Berechne den Erwartungswert $\hat{n}$ eines Zustandes $|\alpha\rangle$, und entsprechend σ_n und:

$$P(n) = |\langle\alpha|n\rangle|^2$$

Was die Wahrscheinlichkeit einen Zustand $|\alpha\rangle$ mit Energie E_n anzutreffen.

c) *(10 Bonus p.)* Zeige, dass diese Zustände zwar normalisierbar aber nicht orthogonale Zustände sind. *Tip*: eventuell ist die Verwendung der Baker-Campbell-Hausdorff Formel hilfreich:

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{[\hat{A},\hat{B}]}e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}$$

Übung 3. Hermitesche Operatoren (30 Punkte)

In dieser Übung wirst du ein paar Theoreme beweisen, welche für die Quantenmechanik höchst relevant sind.

a) *(5 p.)* **Theorem I:** Falls zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren und $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{A}$ ist, so ist $\hat{B}\,|\psi\rangle$ ebenfalls ein Eigenvektor von $\hat{A}$ mit den selben Eigenwerten.

b) *(5 p.)* **Theorem II:** Falls zwei Observablen A und B kommutieren und $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ zwei Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten von $\hat{A}$ sind, so verschwindet das Matrixelement $\langle\psi_1|\,\hat{B}\,|\psi_2\rangle$.

c) *(15 p.)* **Theorem III:** Falls zwei Observablen A und B kommutieren, kann man für $\hat{A}$ und $\hat{B}$ eine gemeinsame Orthonormalbasis aus Eigenvektoren konstruieren. Betrachtet nur den Fall, in welchem die Spektren von A und B diskret sind.
Hinweis: Da A eine Observable ist, gibt es mindestens eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\hat{A}$:

$$\hat{A}\,|u_n^i\rangle = a_n\,|u_n^i\rangle, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad i = 1, 2, \ldots, g_n,$$

wobei g_n der Grad der Entartung der Eigenwerte a_n beschreibt and $\langle u_n^i|u_m^j\rangle = \delta_{nm}\delta_{ij}$ gilt. Diskutiere die Matrixelemente $\langle u_n^i|\hat{B}|u_m^j\rangle$.

d) *(5 p.)* Zeige die Umkehrung von Theorem III.