Übungsblatt 5
Theoretische Physik 3: WS2023/2024

29.11.2023

Übung 0.

Wie viel Zeit hast du für die Bearbeitung dieser Hausaufgabe benötigt?

Übung 1. Kommutatoren (20 Punkte + 20 bonus)

Der Kommutator von zwei Matrizen $A,\ B$ ist definiert als $[A, B] = AB - BA$.

a) *(5 p.)* Erklären Sie, warum im Allgemeinen $e^A e^B \neq e^{A+B}$ ist. In welchen Fällen gilt das Gleichheitszeichen?

b) *(15 p.)* Betrachten Sie den gleichen Fall $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, und beweisen Sie die Glauber-Formel

$$e^A\, e^B = e^{A+B}\, e^{\frac{1}{2}[A,B]}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $F(t) = e^{tA}\, e^{tB}$. Zeigen Sie, dass sie die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = (A + B + t[A, B])F(t)$ erfüllen muss. Nun lösen sie die Gleichung, indem sie beachten, dass $(A + B)$ und $[A, B]$ kommutieren und somit als reine Zahlen behandelt werden können.

c) *(Bonus 20 p.)* Zeigen Sie unter Verwendung der Methode der Vollständigen Induktion, dass:

$$[A, B]_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} A^{n-k} B A^k \tag{1}$$

wobei der Multikommutator $[A, B]_j$ rekursiv definiert ist als $[A, B]_j = A[A, B]_{j-1} - [A, B]_{j-1}A$. *Hinweis*: Im zweiten Schritt der Induktion nimmt man an, dass Gl. (1) für n gilt und versucht, sie für $n + 1$ zu zeigen. Zeigen Sie ausgehend von Gl. (1) für $n + 1$, dass sie ausgedrückt werden kann als

$$[A, B]_{n+1} = A \left[\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k} A^{n-k} B A^k \right] + \left[\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k-1} A^{n+1-k} B A^{k-1} \right] A.$$

Dann braucht man eine geschickte Änderung einer Summationsvariablen, um am Ende die Definition des Multikommutators für $n + 1$ zu erhalten, womit der Beweis abgeschlossen ist.

Übung 2. Potentialbarriere (30 points)

Betrachten Sie die Potentialbarriere:

$$V(x) = V_0(\theta(x) - \theta(x - a))$$

wobei $\theta(x)$ die Heavyside-Stufenfunktion ist. Man betrachte eine eintreffende Welle von $x \to -\infty$ mit der Wellenfunktion $\psi_E(x) = e^{ikx}$ mit $k = (2mE/\hbar^2)^{1/2}$.

a) *(15 p.)* Bestimmen Sie die Werte der Energie E (falls es sie gibt) für ein Teilchen der Masse m, so dass die reflektierte Welle nicht vorhanden ist (totale Transmission). Nehmen Sie an, dass $E < V_0$ ist.

b) *(10 p.)* Wiederholen Sie die Berechnung von (a) unter der Annahme, dass $E > V_0$ ist.

c) *(5 p.)* Gibt es Werte für die Energie E, bei denen die durchgelassene Welle nicht vorhanden ist (Totalreflexion)?

Übung 3. Endlicher quadratischer Potentialtopf (20 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem endlichen quadratischen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2a} & \text{for } -a \le x \le a \\ 0 & \text{for } x > |a| \end{cases} .$$

Die Energielevel sind durch folgende Bedingung gegeben:

$$z \tan z = \sqrt{z_0^2 - z^2}$$

wobei

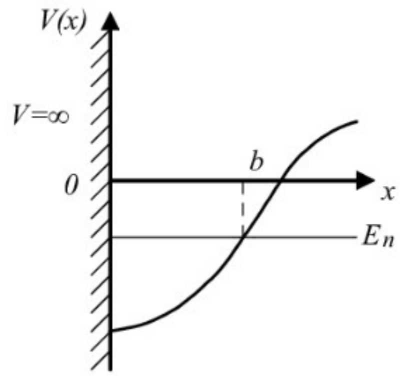
$$z = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{2a}\right)}, \qquad z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{\frac{m\alpha}{a}}.$$

a) *(10 p.)* Betrachte das Limit $a \to 0$ und nimm an, E sei in diesem endlich. Zeige, dass du den eindeutigen gebundenen Zustand des δ-Potentials $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ erhältst.

b) *(10 p.)* Was muss der Wert von $m\alpha a/\hbar^2$ sein, damit das System exakt n gebundene Zustände hat?

Übung 4. WKB-Näherung (30 Punkte)

Betrachten Sie das in der folgenden Abbildung gezeigte Potenzial $V(x)$:



Rechts von dem Wendepunkt b hat die Wellenfunktion die semi-klassische Form:

$$\Psi(x) = \frac{C}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_b^x |p(x)|dx\right), \quad x > b.$$

In dem Bereich $x < b$ wird die Wellenfunktion beschrieben durch:

$$\Psi(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^b p(x)dx + \frac{\pi}{4}\right), \quad x < b.$$

a) *(5 p.)* Leite die folgende Beziehung der Energieniveaus her:

$$\frac{1}{\hbar}\int\limits_0^b \sqrt{2m[E_n - V(x)]}dx = \pi\left(n + \frac{3}{4}\right) .$$

b) *(5 p.)* Betrachte nun das explizite Potential:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x^2} & \text{für } x \geq a \\ \infty & \text{für } x < a \end{cases} \qquad \alpha > 0 .$$

Unter welchen Bedingungen und für welche Werte von x kann die semi-klassische Näherung verwendet werden?

c) *(10 p.)* Leite mit dem Ergebnis von a) und mithilfe einer Integration die Beziehung der Energieniveaus E_n her.

d) *(10 p.)* Finde einen expliziten Ausdruck für die oberen Energieniveaus, welche durch die Bedingung $|E_n| \ll \alpha/a^2$ definiert sind. Erweitere das Ergebnis von c) mit dem kleinen Parameter $|E_n|a^2/\alpha$. Behalte nur die führende Ordnung. Wie verändert sich der Abstand der Energieniveaus mit wachsendem n?