Übungsblatt 4
Theoretische Physik 3: WS2023/2024

22.11.2023

Übung 0

Wie viel Zeit hast du für die Bearbeitung dieser Hausaufgabe benötigt?

Übung 1. Doppeltes δ-Potential. (55 points)

Betrachten Sie das folgende eindimensionale Modellpotential für ein Molekül mit einem doppelt entarteten Zustand:

$$V(x) = -V_0 a \left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right),$$

wobei V_0 und a reele Parameter sind.

a) *(5 p.)* Wenden Sie eine Fouriertransformation auf die dazugehörige Schrödinger Gleichung an, $\hat{H}(x)\psi(x) = E\psi(x)$. Zeigen Sie, dass dies im Impulsraum folgendermaßen aussieht

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\phi(k) - \frac{V_0 a}{\sqrt{2\pi}}\left(\psi(a)e^{-ika} + \psi(-a)e^{ika}\right) = E\phi(k),$$

wobei

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ikx}\psi(x) \quad \text{und} \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{ikx}\phi(k).$$

b) *(15 p.)* Unter Verwendung der erhaltenen Schrödinger-Gleichung im Impulsraum finden Sie die gebundenen Zustände des Systems im Koordinatenraum. Wie viele gebundene Zustände hat das System?
Tipp: Die Lösung muss an den Punkten $x = \pm a$ konsistent sein.

c) *(10 p.)* Für $V_0 a = \frac{\hbar^2}{ma}$, finden Sie die Energien der stationären Zustände. Skizzieren Sie die entsprechenden Wellenfunktionen.
Tipp: Nutzen Sie die Tatsache, dass es gerade und ungerade Lösungen gibt.

d) *(10 p.)* Diskutieren Sie die Rolle des Parameters a für die stationären Zustände (betrachten Sie $a \to 0$ und $a \to \infty$).

e) *(15 p.)* Finden Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für einen Strahl von Teilchen in diesem Potential.

Übung 3. Eindimensionaler unendlicher Kristall (25 Punkte)

Betrachte einen eindimensionalen unendlichen Kristall. In erster Näherung kann dieser durch eine Reihe Ionen in festen Abständen a dargestellt werden. Wir interessieren uns für die Elektron-Energielevel in diesem Kristall. Ein Elektron sieht ein periodisches Potential, welches von der Ionen-Reihe erzeugt wird. Für ein periodisches Potential $V(x+a) = V(x)$, sagt uns Bloch's Theorem, dass die Lösung der Schrödingergleichung folgende Bedingung erfüllt:

$$\Psi(x+a) = e^{iKa}\Psi(x).$$

Dies bedeuter, dass wir die Schrödingergleichung nur für$0 \leq x \leq a$ lösen müssen, *also* in einer Zelle des Kristalls. Die Wellenfunktion außerhalb dieser Zelle wird durchs Bloch'sche Theorem gegeben. Was nun noch festgelegt werden muss, ist die Randbedingung. Üblicherweise verwendet man die periodische Randbedingung, für welche eine große, aber endliche Anzahl Ionen N betrachtet wird und man zusätzlich fordert

$$\Psi(x+Na) = \Psi(x).$$

Im Limit von unendlich vielen Ionen $N \to \infty$, erhalten wir den unendlichen Kristall.

a) *(5 p.)* Benutze das Bloch'sche Theorem and die periodische Randbedingung, um die erlaubten Werte für K herzuleiten. Was passiert im Limit $N \to \infty$?

b) *(20 p.)* Betrachte als, von den Elektronen wahrgenommenes Potential, den sogenannten Dirac-Kamm

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja),$$

wobei a eine reelle Konstante ist. Löse die Schrödingergleichung für $0 \leq x \leq a$ und zeige, dass die erlaubten Werte der Energie E durch folgende Bedingung festgelegt sind:

$$\cos Ka = \cos ka + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \sin ka, \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Zeige, dass die Energielevel für genügend große N in Bändern angeordnet sind.

Übung 3. Matrizen: Eigenwerte und Eigenvektoren (20 Punkte)

a) *(3 p.)* Betrachte die drei Pauli-Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Berechne σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2, sowie die Kommutatoren $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_y, \sigma_z]$, $[\sigma_z, \sigma_x]$.

b) *(5 p.)* Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_x, σ_y and σ_z.

c) *(5 p.)* Berechne ebenso die Eigenwerte und Eigenvektoren der 2D- and hyperbolischen Drehungsmatrizen:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix}.$$

d) *(7 p.)* Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden 3×3 Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$