# Übungsblatt 3
# Theoretische Physik 3: WS2023/2024

15.11.2023

## Exercise 0

Wie viel Zeit hast du für die Bearbeitung dieser Hausaufgabe benötigt?

## Übung 1. Harmonischer Oszillator: Aufsteigeoperatoren (35 Punkte)

Betrachte einen quantenmechanischen Harmonischen Oszillator (HO), dessen zeitunabhängige Grundzustandswellenfunktion gegeben ist durch

$$\Psi_0(x, t=0) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \equiv \alpha e^{-\frac{y^2}{2}},$$

wobei zur Vereinfachung $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$ und die dimensionslose Variable $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ eingeführt wurde.

a) *(5 p.)* Nutze die explizite Definition des Aufsteigeoperators

$$\hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + y\right),$$

um einen Ausdruck für die Wellenfunktion $\Psi_1$ des ersten angeregten Zustandes zu finden und prüfe deren Orthogonalität mit $\Psi_0$.

b) *(20 p.)* Bestimme $\langle x\rangle, \langle p\rangle, \langle x^2\rangle$ und $\langle p^2\rangle$ für $\Psi_0$ und $\Psi_1$ durch explizite Integration.

c) *(5 p.)* Überprüfe für beide Zustände die Unschärferelation.

d) *(5 p.)* Berechne die Erwartungswerte der kinetischen Energie $\langle T\rangle$ und der potentiellen Energie $\langle V\rangle$. Überprüfe, dass sich beide zu $\langle H\rangle$ addieren.

## Übung 2. Harmonischer Oszillator: Potenzreihenmethode (40 Punkte)

Der quantenmechanische HO lässt sich über einen Potenzreihenansatz lösen. Dazu beginnt man mit der stationären Schrödinger-Gleichung ($\Psi'' \equiv \mathrm{d}^2\Psi/\mathrm{d}x^2$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\Psi(x) = E\,\Psi(x).$$

a) *(10 p.)* Um die Problemstellung zu vereinfachen, umschreibe die obige Gleichung mit den dimensionslosen Größen

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \quad \varepsilon = E/\hbar\omega.$$

Definiere außerdem $\varphi(y) = c\Psi(x)$ und bestimme $c$ so dass $\varphi(y)$ normiert ist.

b) *(10 p.)* Nun kann das asymptotische Verhalten der unbekannten Funktion explizit ausgedrückt:

$$\varphi(y) = h(y)\, e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

und die folgende Gleichung für $h(y)$ hergeleitet werden:

$$h'' - 2yh' + (2\varepsilon - 1)h = 0.$$

Setze nun voraus, dass $h(y)$ als unendliche Potenzreihe in $y$ geschrieben werden kann

$$h(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, y^m.$$

Bestimme die Rekursionsrelation zwischen den Koeffizienten $a_m$ und zeige, dass sich zwei unabhängige Lösungsmengen (*gerade* und *ungerade*) ergeben.

c) *(15 p.)* Zeige, dass die unendliche Reihe an einem endlichen $n$ abgeschnitten werden muss: $a_{m>n} = 0$, damit die Wellenfunktion endlich und normierbar bleibt.
(*Hinweis*: Betrachte die Maclaurin-Entwicklung von $e^{y^2}$ und vergleiche sie mit dem Verhalten der Reihe für große $y$).

d) *(5 p.)* Obige Schlussfolgerung ausnutzend, zeige, dass die Energie durch $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ quantisiert ist.

Die resultierenden Polynome $h_n(y)$sind proportional zu den *Hermiteschen Polynome* $H_n(y)$. Die orthonormale Lösungsmenge der ursprünglichen Schrödinger-Gleichung ergibt sich somit zu:

$$\Psi_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}\right)^{-\frac{1}{2}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \quad n = 0, 1, 2, ....$$

## Übung 3. Fourier Transformation. (25 points)

Wir definieren die (räumliche) Fourier-Transformation (FT) einer Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ und die korrespondierende inverse Transformation als

$$\Phi(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t) e^{-ikx} \mathrm{d}x,$$
$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k,t) e^{ikx} \mathrm{d}k.$$

Berechnen Sie die Fourier-Transformationen der folgenden Gleichungen

a) *(2 p.)* $\Psi(x) = \delta(x)$ und $\Psi(x) = \delta(x - x_0)$

b) *(2 p.)* $\Psi(x) = a = \text{const}$

c) *(4 p.)* $\Psi(x) = \cos(x)$

d) *(7 p.)* $\Psi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

e) *(10 p.)* Nutzen Sie die FT um die Schrödinger-Gleichung des Harmonischen Oszillators *im k-Raum* darzustellen.

*Hinweis*: Benutzen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{ax}\, dx = \frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}\, dx$$