Zusammenfassung zum Thema
Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

Mathematischer Brückenkurs (B)
für Naturwissenschaftler:innen

WS 2023/2024

Vektorwertige Funktionen einer reellen Variablen
Wir verallgemeinern die Parameterform der Geraden, um allgemeine Bewegungen von Teilchen darstellen zu können: $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$. Die Ableitung erfolgt komponentenweise. Physikalisch gesehen ist $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$ die Geschwindigkeit, und $\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}$ die Beschleunigung, wenn wir t als Zeit interpretieren. Geometrisch gesehen ist $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ ein Tangentialvektor zur Kurve $\{\boldsymbol{x}(t) | t \in \mathbb{R}\}$ am Punkt $\boldsymbol{x}(t)$.

Funktionen mehrerer reeller Variablen
In einem weiteren Verallgemeinerungschritt betrachten wir im Folgenden allgemeine Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, z.B. parametrisierte Flächen $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, oder das Vektorfeld $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das jedem Punkt im Raum die an diesem Punkt herrschende elektrische Feldstärke zuweist.
Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nach x_i dadurch definiert, dass nach x_i differenziert wird, während alle anderen Komponenten von x konstant gehalten werden, d.h. z.B.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} .$$

Höhere partielle Ableitungen können sowohl nach derselben als auch nach verschiedenen Variablen genommen werden, z.B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) .$$

Es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} ,$$

wenn beide gemischten Ableitungen existieren und stetig sind.
Für die Verkettung $(f \circ x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt die verallgemeinerte Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} .$$

Höherdimensionale Integrale
Wir definieren das Integral einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über die Fläche $\mathcal{F} = \{(x,y)|x \in [a;b] \wedge y \in [y_1(x);y_2(x)]\}$ über

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} g \ \mathrm{d}F = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g(x,y) \ \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \left(G(x,y_2(x)) - G(x,y_1(x))\right) \ \mathrm{d}x$$

mit G einer beliebigen Stammfunktion von g bezüglich y für alle x,

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = g(x,y)\,.$$

Entsprechend definieren wir das Volumenintegral einer Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ über das Volumen $\mathcal{V} = \{(x,y,z)|x \in [a;b] \wedge y \in [y_1(x);y_2(x)] \wedge z \in [z_1(x,y);z_2(x,y)]\}$ als

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} g \ \mathrm{d}V = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(y,x)}^{z_2(y,x)} g(x,y,z) \ \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\,.$$