

Zusammenfassung zum Thema Gewöhnliche Differentialgleichungen

Mathematischer Brückenkurs (B)
für Naturwissenschaftler:innen

WS 2023/2024

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Physikalische Gesetze bestimmen zukünftige Zustände durch die momentane Veränderung physikalischer Größen in Abhängigkeit vom momentanen Zustand. Mathematisch lässt sich eine solche Beziehung durch eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

ausdrücken. Physikalische Gesetze sind in der Regel Differentialgleichungen 2. Ordnung ($n = 2$), gelegentlich auch 1. Ordnung ($n = 1$).

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen wir die Differentialgleichung durch n Anfangswertbedingungen $x(0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$ ergänzen, die den Ausgangszustand beschreiben. Wir unterscheiden homogene lineare Differentialgleichungen

$$\sum_{k=0}^n c_k \frac{d^k x}{dt^k} = 0$$

von inhomogenen linearen Differentialgleichungen

$$\sum_{k=0}^n c_k \frac{d^k x}{dt^k} = f(t)$$

Wenn $x_p(t)$ irgendeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung (sog. partikuläre Lösung) ist und $x_h(t)$ die zugehörige homogene Differentialgleichung löst, so ist auch $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Einige lösbare Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine Differentialgleichung der trivialen Form

$$\dot{x}(t) = f(t)$$

hat die Lösung

$$x(t) = \int f(t) dt + c$$

wobei die Integrationskonstante c durch die Anfangswertbedingung $x(0) = x_0$ bestimmt wird. Entsprechend können Differentialgleichungen beliebiger Ordnung der Form

$$x^{(n)}(t) = f(t)$$

durch n -faches Integrieren gelöst werden. Die n Integrationskonstanten sind durch die n Anfangswertbedingungen $x^{(k)}(0) = x_0^{(k)}$ eindeutig bestimmt.

Die einfachste nicht-triviale Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t)$$

beschreibt einen Prozess, in dem die Veränderung einer Größe proportional zu dieser Größe selbst ist. Für $\lambda > 0$ ist dies ein Wachstumsprozess (z.B. Bakterienkolonie), für $\lambda < 0$ ein Zerfallsprozess (z.B. radioaktiver Zerfall). Die Lösung der Wachstums- oder Zerfallsgleichung lautet $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$. Die logistische Differentialgleichung (frz. *logis* = Lebensraum)

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) [\kappa - x(t)]$$

beschreibt einen durch eine endliche Kapazität κ beschränkten Wachstumsprozess. Die Lösung lautet: $x(t) = \frac{\kappa}{1 - (1 - \kappa/x_0)e^{-\kappa\lambda t}}$.

Die Schwingungsgleichung

Wegen $\frac{d^2}{dt^2} \sin t = -\sin t$ und $\frac{d^2}{dt^2} \cos t = -\cos t$ hat die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Lösungen der Form

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

wobei C_1, C_2 durch die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ festgelegt werden.

Wenn wir der Schwingungsgleichung noch einen Reibungsterm hinzufügen, erhalten wir die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung ($\gamma > 0$)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -2\gamma \frac{dx}{dt} - \omega^2 x$$

Wenn wir für die Lösung den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ machen, so erhalten wir für λ die Gleichung

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

mit Lösungen

$$\lambda_{\pm} = \begin{cases} -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, & \gamma \geq \omega \\ -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} & \gamma < \omega \end{cases}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $\gamma > \omega$: Kriechfall, $x(t) = C_1 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$
2. $\gamma = \omega$: aperiodischer Grenzfall, $x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$
3. $\gamma < \omega$: Schwingfall, $x(t) = e^{-\gamma t} \left(C_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right)$

Wir betrachten nun erzwungene Schwingungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = A e^{i\omega_f t}$$

wobei wir unsere Gleichung nun komplexifiziert haben: Real- und Imaginärteil stellen jeweils eine Differentialgleichung dar.

Der Ansatz $x_p(t) = B e^{i\omega_f t}$ liefert

$$(-\omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f + \omega^2)B = A$$

und für $\gamma > 0$ erhalten wir

$$B = \frac{A}{(\omega^2 - \omega_f^2) + 2i\gamma\omega_f}$$

Die allgemeine Lösung lautet somit $x(t) = \frac{A}{(\omega^2 - \omega_f^2) + 2i\gamma\omega_f} e^{i\omega_f t} + x_h(t)$, wobei $x_h(t)$ für großes t mit $e^{-\gamma t}$ absterbt. Wir folgern, dass für kleines γ und $\omega_f = \omega$ die Amplitude der erzwungenen Schwingung groß wird – es tritt Resonanz auf.