Übungsblatt 8

zum Mathematischen Brückenkurs für Naturwissenschaftler:innen

im Wintersemester 2023/24

Dozent: Apl.Prof. Dr. G. von Hippel

1. *Einige spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

   (a) Finden Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils eine Lösung in Form eines Polynoms vom Grad n für $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, dessen führender Koeffizient gleich Eins ist:

   1. $p''(t) - 2tp'(t) + 2np(t) = 0$
   2. $tp''(t) + (1 - t)p'(t) + np(t) = 0$
   3. $(1 - t^2)p''(t) - 2tp'(t) + n(n + 1)p(t) = 0$
   4. $(1 - t^2)p''(t) - 3tp'(t) + n(n + 2)p(t) = 0$

   (b) Verifizieren Sie, dass für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ die Lösungen des Anfangswertproblems

   $$-u_k''(x) + x^2 u_k(x) = (2k + 1)u_k(x), \qquad u_k(0) = \frac{1 + (-1)^k}{2}, \quad u_k'(0) = \frac{1 - (-1)^k}{2}$$

   durch

   $$u_0(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad u_1(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad u_2(x) = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad u_3(x) = x(1 - \frac{2}{3}x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

   gegeben sind.

2. *Erzwungene Schwingungen*

   (a) Verifizieren Sie, dass für $\gamma > 0$ oder $\omega \neq \omega_0$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

   $$f''(t) + 2\gamma f'(t) + \omega_0^2 f(t) = A\sin(\omega t)$$

   durch

   $$f(t) = \frac{A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin(t\omega) - 2A\gamma\omega\cos(t\omega)}{4\gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}$$

   gegeben ist. Interpretieren Sie diese Lösung in Hinsicht auf die in der Vorlesung angegebene komplexifizierte Lösung. (Hinweis: Benutzen Sie die Euler-Formel!)

   (b) Verifizieren Sie ferner, dass für $\gamma = 0$, $\omega = \omega_0$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

   $$f''(t) + \omega_0^2 f(t) = A\sin(\omega_0 t)$$

   durch

   $$f(t) = -\frac{At\cos(\omega_0 t)}{2\omega_0}$$

   gegeben ist. Interpretieren Sie diese Lösung im Hinblick auf das Verhalten ungedämpft schwingender Systeme unter resonanter Anregung.