Übungsblatt 5

zum Mathematischen Brückenkurs
für Naturwissenschaftler:innen

im Wintersemester 2023/24

Dozent: Apl.Prof. Dr. G. von Hippel

1. *Rechnen mit Vektoren im* $\mathbb{R}^n$

    1. Bestimmen Sie für Paare $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_j$ von Vektoren gleicher Dimension jeweils $\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{x}_j$, $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j$, $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j$, sowie den Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{x}_i$ und $\boldsymbol{x}_j$. Welche Vektoren sind jeweils parallel bzw. orthogonal zueinander?
    2. Bestimmen Sie für Mengen von k Vektoren $\{\boldsymbol{x}_i\}$ im $\mathbb{R}^n$ jeweils, ob diese linear unabhängig sind. Was gilt für $k > n$?

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_9 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{13} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \\ -\xi \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{14} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{15} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. *Vektorprodukt im* $\mathbb{R}^3$

    1. Bestimmen Sie für Paare $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_j$ von dreidimensionalen Vektoren jeweils das Vektorprodukt $\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{x}_j$.
    2. Bestimmen Sie für Tripel $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_j$, $\boldsymbol{x}_k$ von dreidimensionalen Vektoren jeweils $\boldsymbol{x}_i \cdot (\boldsymbol{x}_j \times \boldsymbol{x}_k)$. Wann ist dieses Produkt gleich Null, und warum?

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_8 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. *Rechnen mit Matrizen*

   Bestimmen Sie für alle Paare X, Y von Matrizen, welche der Operationen $X+Y$, XY, und YX jeweils definiert sind, und werten Sie diese gegebenenfalls aus:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} \tau & \xi & \eta & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cos\gamma \\ 0 & 0 & \sin\gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *Drehungen in der Ebene und im Raum*

   (a) Überzeugen Sie sich davon, dass die zu der Matrix

   $$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

   gehörige lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Winkel α um den Ursprung darstellt. Überprüfen Sie, dass tatsächlich $R(\alpha+\beta) = R(\alpha)R(\beta)$ gilt.

   (b) Bestimmen Sie die drei Matrizen $R_1(\alpha)$, $R_2(\beta)$, $R_3(\gamma)$, die jeweils einer Drehung des $\mathbb{R}^3$ um die x_1-, x_2- bzw. x_3-Achse mit einem Drehwinkel von α, β bzw. γ entsprechen.

   (c) Berechnen Sie jeweils $R_i(\varphi)R_j(\vartheta)$ und $R_j(\vartheta)R_i(\varphi)$ für $i \neq j$. Was beobachten Sie? Interpretieren Sie dieses Ergebnis geometrisch.

5. *Lineare Gleichungssysteme und Matrizen*

   Bestimmen Sie, für welche Paare A, b von Matrizen A aus Aufgabe 3 und Vektoren b aus Aufgabe 1 das Gleichungssystem $Ax = b$ definiert ist und finden Sie (falls es definiert ist) seine jeweilige Lösungsmenge.