

Übungsblatt 4

zum Mathematischen Brückenkurs
für Naturwissenschaftler:innen
im Wintersemester 2023/24

Dozent: Apl.Prof. Dr. G. von Hippel

1. Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

Zeigen Sie, dass die Hyperbelfunktionen \sinh und \cosh folgenden Beziehungen genügen:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(ix) = i \sin x$
- $\cosh(ix) = \cos x$
- $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x)$
- $\sinh x + \cosh x = e^x$
- $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

2. Ableitungen von Umkehrfunktionen

Benutzen Sie jeweils die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion, um die Ableitungen folgender Funktionen zu bestimmen:

- $x \mapsto \arcsin x$
- $x \mapsto \arctan x$
- $x \mapsto \operatorname{arsinh} x$
- $x \mapsto \operatorname{artanh} x$

3. Stammfunktionen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils die maximale Definitionsmenge D sowie eine Stammfunktion auf D :

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = \frac{1}{x^4}$
- $f(x) = x^5 + x^3 - x$
- $f(x) = (x^2 - 1)^2$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = e^{-x}$
- $f(x) = \sin x$
- $f(x) = \cos(x + a)$
- $f(x) = \sinh x$
- $f(x) = \cosh x$
- $f(x) = \log x$
- $f(x) = ax^2 + e^{-bx} + \log(cx + d)$
- $f(x) = x \log x$
- $f(x) = x^n \log x$
- $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$
- $f(x) = xe^x$
- $f(x) = e^{ax} \sin(\omega x)$
- $f(x) = \sin x \cos x$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
- $f(x) = e^{\sin(\lambda x)} \cos(\lambda x)$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = e^{-\sin^2 x} \cos x \sin x$
- $f(x) = \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}$
- $f(x) = \frac{7x^3 - 5x^2 - 6}{x^4 - x^3 - x^2 - x - 2}$

4. Bestimmte Integrale

Bestimmen Sie jeweils den Wert der folgenden bestimmten Integrale:

1. $\int_0^1 x \, dx$
2. $\int_a^b x^n \, dx$
3. $\int_\alpha^\beta (3x^2 - 2\beta x + \alpha\beta) \, dx$
4. $\int_0^1 e^x \, dx$
5. $\int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha$
6. $\int_0^\pi \cos \beta \, d\beta$
7. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$
8. $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} \, dx$
9. $\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2} \, dx$
10. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \log x \, dx$
11. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\log x}{x} \, dx$
12. $\int_0^{2\pi} \sin^2 \omega \, d\omega$
13. $\int_0^{2\pi} \sin^2 \omega \cos \omega \, d\omega$
14. $\int_{-\pi}^{\pi/3} \sin x \cos x \, dx$
15. $\int_1^{e^n} x^n \log x \, dx$
16. $\int_0^1 \frac{7x^3 - 5x^2 - 6}{x^4 - x^3 - x^2 - x - 2} \, dx$
17. $\int_2^3 \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} \, dx$
18. $\int_0^y \frac{dx}{1-xy}, y < 1$
19. $\int_0^y \frac{dx}{1+xy}, y > 0$
20. $\int_0^{\pi/2} e^{-\sin^2 x} \cos x \sin x \, dx$
21. $\int_{-1}^1 \tanh t \, dt$
22. $\int_e^{e^2} \frac{\log(\log \xi)}{\xi} \, d\xi$
23. $\int_e^{e^2} \frac{\log \xi \log(\log \xi)}{\xi} \, d\xi$
24. $\int_0^\omega \sinh(\cosh u) \sinh u \, du$
25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 9) \cos x}{\cos^2 x + 8} \, dx$
26. $\int_0^2 x^5 e^{-x^2} \, dx$

5. Uneigentliche Integrale

Bestimmen Sie jeweils, ob folgende uneigentliche Integrale existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert:

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{x}$
2. $\int_1^\infty \frac{dy}{y}$
3. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$
4. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$
5. $\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z}}$
6. $\int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{u}}$
7. $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}}$
8. $\int_0^\infty e^x \, dx$
9. $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx$
10. $\int_0^\infty e^{-x} \, dx$
11. $\int_{-\infty}^0 e^{-x} \, dx$
12. $\int_0^\infty x e^{-x} \, dx$
13. $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2/2} \, dx$
14. $\int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{1+\omega^2}$