

Übungsblatt 3

zum Mathematischen Brückenkurs
für Naturwissenschaftler:innen
im Wintersemester 2023/24

Dozent: Apl.Prof. Dr. G. von Hippel

1. Eigenschaften von reellen Funktionen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils, ob diese nach oben bzw. nach unten beschränkt, beschränkt, monoton wachsend bzw. fallend, streng monoton wachsend bzw. fallend, und gerade bzw. ungerade sind.

- | | |
|-----------------------|------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2$ | 6. $f(x) = x^5 + x^3 - x$ |
| 2. $f(x) = e^x$ | 7. $f(x) = (x^2 - 1)^2$ |
| 3. $f(x) = e^{-x^2}$ | 8. $f(x) = e^x + e^{-x}$ |
| 4. $f(x) = \sin x$ | 9. $f(x) = e^x - e^{-x}$ |
| 5. $f(x) = \sin(x^2)$ | 10. $f(x) = x \log(x^2 + 1)$ |

2. Grenzwerte von Funktionen

Bestimmen Sie jeweils die folgenden Grenzwerte:

- | | |
|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)^2}{1 - x}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+1}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sinh^3 x}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x + \sqrt{x-1})$ | 10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ |

3. Ableitung von Funktionen – I

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen ausgehend von der Definition der Ableitung:

- | | |
|-----------------|--------------------|
| 1. $f(x) = x^2$ | 3. $f(y) = \sin y$ |
| 2. $f(x) = x^3$ | 4. $f(y) = \cos x$ |

4. Ableitung von Funktionen – II

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen nach dem angegebenen Argument, und geben Sie die zugehörigen Definitionsbereiche an:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^n + x^p - c$, $n \in \mathbb{N}$, $p > 0$
3. $g(\omega) = \sin(\omega t + \varphi)$
4. $h(t) = \sin(\omega t + \varphi)$
5. $f(s) = \sqrt{s^2 + 1}$
6. $p(q) = -(q^2 - a^2)^2$
7. $S(h) = e^{\alpha h^2 + \beta h - \gamma} + e^{\omega h}$
8. $\lambda(x) = x \sin x + x^2 \cos x$
9. $\rho(\sigma) = \sigma \log \sigma - \sigma$
10. $\theta(z) = \sum_{k=1}^8 kz^k$
11. $f(y) = \frac{y^2 - 2y - 1}{y^2 + 4}$
12. $f(y) = \frac{y^2 - 2y - 1}{y^2 - 4}$
13. $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{1 + e^{x^2}}$
14. $s(x) = x\sqrt{1 + x^2}$
15. $w(t) = \sqrt{(1 - x^2)^2}$
16. $\sigma(t) = |t + 1|$
17. $r(t) = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t + \phi)$
18. $z(x) = \frac{\sin x - \cos x}{x^2 + 2}$
19. $k(x) = \log \sqrt{x^4 + 1}$
20. $f(x) = \sqrt{\log(x^4 + 1)}$

5. Höhere Ableitungen

Bestimmen Sie jeweils die ersten, zweiten und dritten Ableitungen folgender Funktionen nach dem angegebenen Argument:

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
3. $g(y) = y \log y$
4. $h(r) = \frac{1}{1+r^2}$
5. $u(\tau) = \sin^2(\tau^3)$
6. $g(x) = e^{\sin x}$
7. $f(x) = \sin(\alpha x) + \alpha \cos x$
8. $t(\alpha) = \tan \alpha$

6. Taylor-Reihen

Entwickeln Sie folgende Funktionen jeweils in eine Taylor-Reihe um den angegebenen Punkt:

1. $P(x) = x^2 + px + q$, $x = p$
2. $f(x) = e^{-x}$, $x = 0$
3. $f(x) = \sin x$, $x = \pi$
4. $f(y) = \log y$, $y = 1$
5. $f(x) = \log(x + 1)$, $x = 0$
6. $g(\rho) = \frac{1}{1-\rho}$, $\rho = 0$

7. Extrema von Funktionen

Bestimmen Sie jeweils alle lokalen sowie die globalen Extrema der folgenden Funktionen auf dem angegebenen Definitionsbereich:

1. $f(x) = \lambda(x^2 - v^2)^2$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = e^{-x}$, $x \in [0; 1]$
3. $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi/2; \pi]$
4. $f(x) = |x^2 - 1|$, $x \in [-2; 5]$
5. $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, $x \in [0; \infty)$
6. $g(t) = \frac{t+1}{t^2-4}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$