1. Übungsblatt
Theoretische Physik 3 : QM WS2023/24

25.10.2023

Aufgabe 1. (25 Punkte)

Gegeben sei ein Teilchen, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ durch folgende Wellenfunktion beschrieben wird:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A\,(\frac{x}{a})^2 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ A\,(\frac{b-x}{b-a})^2 & \text{für} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei a, b und A reelle Konstanten seien.

a) Bestimmen Sie A, sodass die Wellenfunktion normiert ist.

b) Plotten Sie $\Psi(x,0)$ als Funktion von x.

c) Wo befindet sich das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der höchsten Wahrscheinlichkeit?

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Bereich $-\infty < x \leq a$ (links von a) zu beobachten? Wie hoch ist diese Wahrscheinlichkeit in den Spezialfällen $b = a$ und $b = 2a$?

e) Was ist der Erwartungswert von x?

Aufgabe 2. (25 Punkte)

Gegeben sei folgende Wellenfunktion:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} (\frac{a}{2L})^{1/2} e^{-i\omega t} & |x| < L \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei a, L und ω reelle Konstanten seien.

a) Normieren Sie die Wellenfunktion.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von x und x^2, um die Varianz σ^2 zu bestimmen.

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das System in einem Zustand außerhalb eines Bereiches von $\pm\sigma$ um $\langle x \rangle$ zu beobachten?

Aufgabe 3. (25 Punkte)

Ein Teilchen mit der Masse m befinde sich im Zustand

$$\Psi(x,t) = A\, e^{-a(\frac{m}{\hbar}\, x^2 + it)},$$

wobei A und a positive (reelle) Konstanten seien.

a) Bestimmen Sie A, sodass die Wellenfunktion normiert ist.

b) Welches Potential $V(x)$ muss man für $\Psi(x,t)$ wählen, um die Schrödinger Gleichung zu erfüllen?

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von x und x^2. Berechnen Sie weiterhin folgende Ausdrücke:

$$\left\langle \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle := \int \mathrm{d}x\, \Psi^* \left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi \right], \qquad \left\langle \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right\rangle := \int \mathrm{d}x\, \Psi^* \left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi \right].$$

d) Bestimmen Sie die Varianz σ^2 von x und $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. Wie groß ist das Produkt der Standardabweichungen dieser Größen?

Aufgabe 4. (25 Punkte)

In dieser Aufgabe werden wir versuchen, mit ein paar der Eigenschaften einer eindimensionalen Gaußschen Wellenfunktion vertraut zu werden. Wir betrachten eine allgemeine Gaußsche Wellenfunktion. Sie ist gegeben durch

$$\Psi(x) = \Psi_0 e^{-Ax^2+Bx},$$

wobei A, B komplexe Zahlen mit $\mathrm{Re}[A] > 0$ seien. Normieren Sie die Wellenfunktion zunächst und zeigen Sie folgende Relationen:

a) $\langle x \rangle = \frac{\mathrm{Re}[B]}{2\mathrm{Re}[A]}$,

b) $\sigma^2 = \frac{1}{4\mathrm{Re}[A]}$.

Hinweis: Zerlegen Sie die Wellenfunktion in ihren Real- und Imaginärteil.
Mathematischer Tipp: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}$.