Übungsblatt 11
Theoretische Physik 3: QM WS2022/2023
Dozent: Prof. Dr. M. Vanderhaeghen

18.01.2023

Aufgabe 1. Spin Operatoren (25 Punkte)

a) *(15 p.)* Stelle eine beliebige Funktion f mit dem Argument $a + \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}$ als lineare Funktion wie folgt dar:

$$f\left(a + \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}\right) = A + \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}$$

Schreibe die Kooeffizienten A und $\mathbf{B}$ explizit ($\boldsymbol{\sigma}$ ist der Vektor der Pauli matrizen).

Hint: verwende die Invarianz des Problems gegenüber Rotation und wende es auf die Eigenzustände der σ_3 matrix an.

b) *(10 p.)* Eine der wichtigsten Eigenschaften der Pauli Matrizen ist die Expansion der folgenden exponentiellen Form:

$$e^{i\alpha(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})} = I_2 \cos\alpha + i\left(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\right)\sin\alpha$$

In welcher I_2 für die 2×2 Identität steht und $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor in einer beliebigen Raumrichtung ist. Verwende das Ergebnis aus a).

Aufgabe 2. Verschränkte Zustände (25 Punkte)

Seien $|0\rangle$ und $|1\rangle$ die orthonormale Basis eines 1-Teilchen Zustandes.

a) *(10 p.)* Was sind die Bedingungen damit der folgende Zustand ein verschränkter Zustand ist?

$$|\psi\rangle = A\,|0\rangle \otimes |0\rangle + B\,|0\rangle \otimes |1\rangle + C\,|1\rangle \otimes |0\rangle + D\,|1\rangle \otimes |1\rangle$$

b) *(15 p.)* Überprüfe, ob die folgenden Zustände verschränkt sind oder nicht:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}\,|0\rangle \otimes |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}\,|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}\,|1\rangle \otimes |1\rangle$$
$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi_1}|0\rangle \otimes |0\rangle + e^{i\varphi_2}|0\rangle \otimes |1\rangle + e^{i\varphi_3}|1\rangle \otimes |0\rangle + e^{i\varphi_4}|1\rangle \otimes |1\rangle\right)$$

φ_i sind reelle Variablen.

Aufgabe 3. Versteckte Variablen und die Bell Ungleichungen (50 Punkte)

Gegeben sei der folgende 3-Teilchen Zustand:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

a) *(25 p.)* Berechne alle möglichen Erwartungswerte von:

$$\langle \psi\,|\sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \sigma_k|\,\psi\rangle$$

Mit $i, j, k = 1, 2$ (8 also insgesamt).

b) *(25 p.)* Alice, Bob und Charlie waren in der Lage den Zustand $|\psi\rangle$ aus dem vorherigen Aufgabenteil zu präperieren und teilen sich je ein Teilchen unter sich auf. Zusätzlich sind sie im Besitz von Messgeräten um entweder σ_1 oder σ_2 ihrer Teilchen zu messen. Basierend auf den Rechnungen von Aufgabenteil a), wie könnten sie die Theorie der verborgenen Variablen bestimmen?