Probeklausur
Theoretische Physik 3: QM WS2022/2023
Dozent: Prof. Dr. M. Vanderhaeghen

01.02.2023

Aufgabe 1. Allgemeine Fragen (20 Punkte + 10 Bonus)

1.1. *(5 p.)* Betrachte die Grundzustandswellenfunktion eines harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung

$$\langle x|\psi_0\rangle = A_0\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Nutze

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar}px} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

und berechne $\langle p|\psi_0\rangle$.

1.2. *(5 p.)* Betrachte den Operator $\hat{T}(a) \equiv e^{\frac{ia}{\hbar}\hat{p}}$, wobei $\hat{p}$ der Impulsoperator und a ein reeller Parameter ist.

a) Ist der Operator eine Observable? Warum?

b) Zeige, dass $\hat{T}(a)\,\psi(x) = \psi(x+a)$.

1.3. *(5 p.)* Nehme an, dass $\hat{H}$ der *zeitunabhängige* Hamiltonian ist.

a) Zeige, dass der Operator $\hat{U}(t-t_0) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}$ unitär ist.

b) Zeige, dass sich die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung wie folgt ergibt

$$\Psi(x,t) = \hat{U}(t-t_0)\Psi(x,t_0),$$

wobei $\Psi(x,t_0)$ eine gegebene Wellenfunktion des Systems zur Zeit t_0 ist.

1.4. *(5 p.)* Betrachte zwei Observablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$.
$\hat{A}$ besitzt zwei normierte Eigenzustände $|a_1\rangle$ und $|a_2\rangle$, mit den zugehörigen Eigenwerten a_1 beziehungsweise a_2.
$\hat{B}$ besitzt zwei normierte Eigenzustände $|b_1\rangle$ und $|b_2\rangle$, mit den zugehörigen Eigenwerten b_1 beziehungsweise b_2.
Nehme an, dass die Eigenzustände wie folgt zusammenhängen

$$|a_1\rangle = \frac{3}{5}\,|b_1\rangle + \frac{4}{5}\,|b_2\rangle \qquad |a_2\rangle = \frac{4}{5}\,|b_1\rangle - \frac{3}{5}\,|b_2\rangle\,.$$

a) Die Messung der Observable $\hat{A}$ ergibt den Wert a_1. In welchem Zustand befindet sich das System (direkt) nach der Messung?

b) Was sind die möglichen Messergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten für eine nachfolgende Messung von $\hat{B}$?

c) Direkt nach der Messung von $\hat{B}$ wird $\hat{A}$ erneut bestimmt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit a_1 zu erhalten?

1.5. *(Bonus 10 p.) Eigenfunktionen und Entartungen.*

a) *(2 p.)* Was ist der Entartungsgrad für die Energie eines freien Teilchens in einer Dimension?

b) *(3 p.)* Ist der Grundzustand eines unendlichen Potentialtopfes eine Impulseigenfunktion? Falls ja, was ist der Impuls des Zustands? Falls nicht, warum nicht?

c) *(5 p.)* Nutze die Schrödingergleichung um zu zeigen, dass in einer Dimension keine entarteten gebundenen Zustände existieren.

Aufgabe 2. Halb-harmonischer Oszillator (30 Punkte + 5 Bonus)

Betrachte ein Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension in einem *"halb"*-harmonischen Potential $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0; \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

bewegt.

a) *(5 p.)* Stelle für $x \geq 0$ die *stationäre* Schrödingergleichung auf. Nutze dabei die dimensionslosen Grösen

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}.$$

b) *(5 p.)* Zeige, dass das asymptotische Verhalten der Lösung für gro"se y durch $e^{-y^2/2}$ gegeben ist.

c) *(8 p.)* Durch Separation des asymptotischen Verhaltens für $y \to \infty$, definieren wir

$$\psi(y) = h(y)e^{-y^2/2}.$$

Bestimme die Gleichung für $h(y)$, $y \geq 0$.

d) *(12 p.)* Die Eigenfunktionen des Hamiltonian des *regulären* quantenmechanischen harmonischen Oszillators lassen sich bekannterweise durch Hermitesche Polynome ausdrücken:

$$\psi_n(y) \propto H_n(y)e^{-y^2/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

wobei die Hermiteschen Polynome $H_n(y)$ die folgende Gleichung erfüllen

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

und gleichwertig durch

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{\partial^n}{\partial y^n} e^{-y^2}.$$

definiert werden können. Bestimme das Spektrum für den Fall des gegebenen *"halb"*-harmonischen Potentials.

e) *(Bonus 5 p.)* Die Hermiteschen Polynome sind normiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, H_n(y)H_m(y)e^{-y^2} = 2^n n! \sqrt{\pi}\delta_{nm}.$$

Was sind die normierten Wellenfunktionen des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes im Fall des gegebenen *"halb"*-harmonischen Potentials?

Aufgabe 3. Stark-Effekt (25 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Verschiebung des Energiespektrums eines Wasserstoffatoms innerhalb eines statischen elektrischen Feldes. Hierzu nutzen wir die Störungstheorie in erster Ordnung. Betrachte ein Elektron im $n = 2$ Zustand des Wasserstoffatoms. Das elektrische Dipolmoment $\vec{d} = -e\vec{r}$ des Elektrons wechselwirkt mit einem externen elektrischen Feld $\vec{E}$ durch

$$\hat{H}'_E = -\vec{d} \cdot \vec{E},$$

was sich als Störung des Coulomb-Potential behandeln lässt.
Nehme ein konstantes elektrisches Feld entlang der x-Achse an:

$$\vec{E} = E_0 \, \vec{e}_x.$$

Die ungestörten Eigenzustände $|n\, l\, m_l\rangle$ (unter Vernachlässigung des Spins) werden mit

$$\begin{aligned}
|1\rangle &\equiv |2\,0\,0\rangle, \\
|2\rangle &\equiv |2\,1\,0\rangle, \\
|3\rangle &\equiv |2\,1\,+1\rangle, \\
|4\rangle &\equiv |2\,1\,-1\rangle,
\end{aligned}$$

bezeichnet.

a) *(15 p.)* Die Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms sind gegeben durch

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r)\, Y_{l,m_l}(\theta, \phi).$$

Gegeben sind die Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned}
Y_{0,0}(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
Y_{1,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \\
Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, e^{\pm i\phi},
\end{aligned}$$

und das radiale Integral

$$\int_0^\infty dr\, r^3 R_{2,0}(r) R_{2,1}(r) = 3\sqrt{3}\, a,$$

mit dem Bohr-Radius a.

Bestimme die 4×4 Matrix-Form von $\hat{H}'_E$ in der ungestörten Basis und nutze $\Omega_e \equiv eE_0 \frac{a}{\hbar}$.

Hinweis: argumentiere unter Ausnutzung von Symmetrierelationen, dass viele der Winkelintegrationen null ergeben.

b) *(10 p.)* Diagonalisiere die obige Matrix um die Korrekturen erster Ordnung, welche sich durch $\hat{H}'_E$ ergeben, für alle vier $n = 2$ Level zu bestimmen (Es müssen nur die Eigenwerte und nicht die Eigenzustände bestimmt werden).

Skizziere qualitativ die Energie der $n = 2$ Level als Funktion des extern angelegten elektrischen Feldes E_0. Kommentiere ihre Entartung.

Aufgabe 4. Ein Teilchen mit Spin $3/2$ (25 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin 3/2.

a) *(3 p.)* Finden Sie die Basis $|s, s_z\rangle$ aus Eigenzuständen von S_z für solch ein Teilchen.

b) *(8 p.)* Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen von S_x und S_y in der zuvor ermittelten Basis.
Hinweis: verwenden Sie $S_\pm = S_x \pm iS_y$ und
$S_\pm|s, s_z\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - s_z(s_z \pm 1)}|s, s_z \pm 1\rangle$.

c) *(8 p.)* Finden Sie die Eigenwerte von S_x mithilfe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

d) *(6 p.)* Geben Sie mindestens einen Eigenvektor von S_x an.