

Übungsblatt 9
Theoretische Physik 3: QM WS2022/2023
Dozent: Prof. Dr. M. Vanderhaeghen

21.12.2022

Übung 1. Unendlicher sphärischer Potentialtopf (30 Punkte)

Betrachte ein Teilchen in einem unendlichen 3D-Potentialtopf des Radius a :

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ +\infty, & r \geq a \end{cases}$$

a) (15 p.) Zeige, dass die Lösung der Schrödinger-Gleichung die folgende ist:

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) \propto j_l\left(\beta_{nl}\frac{r}{a}\right) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Und $j_l(x)$ ist die sphärische Bessel-Funktion der Ordnung l , die wie folgt definiert ist:

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \frac{\sin x}{x}$$

$j_l(x)$ ist die nichtsinguläre Nulllösung der Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + [x^2 - l(l+1)] y = 0$$

β_{nl} ist die n -te Null der sphärischen Bessel-Funktionen der Ordnung l : $j_l(\beta_{nl}) = 0$.

b) (15 p.) Die sphärischen Bessel-Funktionen sind ein spezieller Fall der Bessel-Funktionen $J_\alpha(x)$ definiert als:

$$J_\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(l + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l + \alpha}$$

Denn α ist halbzahlig, also $J_{l+1/2} = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} j_l(x)$.

Berechne mit der Definition der Bessel-Funktionen $J_{1/2}$ und $J_{3/2}$ und prüfe, ob die Beziehung zwischen $J_{l+1/2}$ und j_l tatsächlich richtig ist.

Hinweis: beweise $l!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2l+1))2^l = (2l+1)!$.

Mathehinweise:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ \Gamma(m+1/2) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Übung 2. Wasserstoffatom (20 + 10 Punkte)

Die normierten Wasserstoffwellenfunktionen sind:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[a(n+l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right) Y_l^m(\theta, \phi)$$

Wobei $L_{q-p}^p(x)$ die zugehörigen Laguerre-Polynome sind und $Y_l^m(\theta, \phi)$ die Kugelflächenfunktionen sind.

- (5 p.) Stelle dir vor, das Elektron befindet sich im Zustand $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_{nl}(r)$ es irgendwo zu finden?
- (15 p.) Überprüfe explizit, dass $P_{nl}(r)$ für $n = 3$ richtig auf Eins normalisiert ist.
Hinweis: benutze $\int_0^\infty dx e^{-x} x^n = n!$.
- (10 p.) (Bonus) Zeige, dass $\int_0^\infty dx e^{-x} x^n = n!$.

Übung 3. 2D quanten harmonischer Oszillator (50 + 20 Punkte)

- (10 p.) Vorausgesetzt, Lösungen für den eindimensionalen Fall sind bereits bekannt, löse das Problem des zweidimensionalen isotropen quanten harmonischen Oszillators in kartesischen Koordinaten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \psi(x, y) = E\psi(x, y)$$

Hinweis: verwende die Methode der Variablentrennung: $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$. Schreibe dann getrennte Gleichungen für $X(x)$ und $Y(y)$ auf.

- (5 p.) Schreiben das Energiespektrum auf. Wie hoch ist der Grad der Entartung der Energieniveaus?
- (10 p.) Zeige, dass der Laplace-Operator in zwei Dimensionen in den Polarkoordinaten die Form annimmt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

- (10 p.) Schreibe den Drehimpulsoperator $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ in Polarkoordinaten und zeige, dass $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$.
- (10 p.) Betrachte den zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator in Polarkoordinaten. Trennen Sie die Variablen $\psi(r, \phi) = v(r)u(\phi)$ und erhalten Sie Gleichungen für $v(r)$ und $u(\phi)$.

Die Gleichung für $v(r)$ kann schließlich in die für die generalisierten Laguerre-Polynome umgewandelt werden $L_{n_r}^{|M|+1}\left(\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)$. Dann erhält man die endgültige Lösung:

$$\psi_{n_r M}(r, \phi) = C_{n_r M} r^{|M|} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} L_{n_r}^{|M|+1}\left(\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right) e^{iM\phi}$$

Mit dem Spektrum:

$$E = \hbar\omega(|M| + 1 + 2n_r), \quad n_r = 0, 1, 2, \dots, \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Wobei M die Quantenzahl ist, die \hat{L}_z entspricht.

- (5 p.) Finde Eigenwerte und Eigenfunktionen von \hat{L}_z in Polarkoordinaten. Zeigen Sie, dass der vollständige und orthonormale Satz von Eigenfunktionen sowohl für \hat{H} als auch für \hat{L}_z gilt.
- (20 p.) (Bonus) Finde die Grundzustandslösung der Schröder-Gleichung ($n_r = 0, M = 0$) in Polarkoordinaten.

Hinweis: setze $E = \hbar\omega$, $u''(\phi) = 0$ und ersetze $v(r) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} F(r)$.