Übungsblatt 8
Theoretische Physik 3: QM WS2022/2023
Dozent: Prof. Dr. M. Vanderhaeghen

14.12.2022

Übung 1. Laplace-Operator in sphärischen Koordinaten (20 Punkte)

a) *(15 p.)* Zeige, dass der Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in drei Dimensionen die Form:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

annimmt.

b) *(5 p.)* Zeige, dass der radiale Ausdruck geschrieben werden kann als:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r$$

Übung 2. Drehimpulsoperator (45 Punkte)

a) *(15 p.)* Zeige, dass $L_\pm Y_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\,Y_l^{m\pm1}$.
Tipp: beachte die Norm von $L_\pm Y_l^m$.

b) *(15 p.)* Zeige das für Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$, folgendes gilt:

$$\langle\hat{L}_x\rangle = \langle\hat{L}_y\rangle = 0; \quad \langle\hat{L}_x^2\rangle = \langle\hat{L}_y^2\rangle; \quad \langle\hat{L}_x\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_x\rangle = 0$$

Tipp: betrachte $\langle\hat{L}_\pm\rangle$ und $\langle\hat{L}_\pm^2\rangle$.

c) *(15 p.)* Im Zustand ψ_{lm} mit bestimmtem Drehimpuls l und dessen z-Komponente m, finde die Mittelwerte $\langle\hat{L}_x^2\rangle$, $\langle\hat{L}_y^2\rangle$ sowie die Mittelwerte $\langle\hat{L}_{\tilde{z}}\rangle$ und $\langle\hat{L}_{\tilde{z}}^2\rangle$ in Richtung von $\tilde{z}$-Achse welche einen Winkel von α mit der z-Achse einschließt.
Tipp: benutze $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}^2$.

Übung 3. Erwartungswerte (35 Punkte)

a) *(20 p.)* Beweise das für ein Teilchen in einem Potential $V(\vec{r})$ die Änderungsrate des Erwartungswertes des Bahndrehimpulses $\vec{L}$ gleich dem Erwartungswert des Drehmoments ist. (Rotation analog zu Ehrenfests Theorem):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{L}\rangle = \langle\vec{N}\rangle; \quad \vec{N} = \vec{r}\times(-\vec{\nabla}V)$$

Zeige, dass $\langle\vec{L}\rangle$ für jedes sphärisch symmetrische Potential konstant ist. (Dies ist eine Form der Erhaltung des Drehimpulses in der Quantenmechanik).

b) *(15 p.)* Zeige dass die Mittelwerte der Vektoren $\vec{L}$, $\vec{r}$, $\vec{p}$ für den Partikelzustand mit der Wellenfunktion $\psi = \exp(i\vec{p}_0\cdot\vec{r}/\hbar)\phi(\vec{r})$ durch die klassische Beziehung $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ gegeben ist. Hier ist p_0 ein reeller Vektor und $\phi(\vec{r})$ ist eine reelle Funktion.

(Bonus) **Übung 4. Entartete Quantenzahlen (15 points)**

Verifiziere oder falsifiziere folgende Aussagen:

a) *(10 p.)* Wenn $[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] = \vec{0}$, dann hängen die Energieniveaus nicht von m ab (d.h. die Eigenwerten der Projektion einer der Komponenten des Drehimpulses $\hat{\vec{L}}$).

b) *(5 p.)* Wenn $[\hat{H},\ \hat{L}^2] = 0$, hängen die Energieniveaus nicht von l ab.