

Übungsblatt 6  
Theoretische Physik 3: QM WS2022/2023  
Dozent: Prof. Dr. M. Vanderhaeghen

30.11.2022

**Übung 1. Darstellungen von Operatoren (35 Punkte)**

Erinnere dich an den eindimensionalen quantenmechanischen Harmonischen Oszillator mit dem Spektrum gegeben durch

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

und den stationären Zuständen  $|n\rangle$ :

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle.$$

Erinnere dich an die Leiteroperatoren

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x \mp i\hat{p}),$$

welche auf  $|n\rangle$  wie folgt wirken:

$$a_+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a_- |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle.$$

Wir wissen, dass  $|n\rangle$  eine vollständige ONB in unserem Hilbert-Raum bilden. In einer solchen *diskreten* Basis wird ein Vektor als unendliche diskrete Spalte von Werten dargestellt, während ein Operator durch unendlich dimensionale Matrizen beschrieben wird. Betrachte Matrixdarstellungen von  $\hat{H}$ -,  $\hat{x}$ - and  $\hat{p}$ -Operatoren in dieser Basis.

- a) (5 p.) Schreibe die Matrixdarstellung des Hamiltonian  $H_{nm} = \langle n | \hat{H} | m \rangle$  auf.  
b) (10 p.) Zeige ohne einen expliziten Ausdruck für  $\langle x | n \rangle$  auszunutzen, dass

$$\langle n | \hat{x} | m \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{nm}$$

*Hinweis:* Drücke  $\hat{x}$  durch Ausdrücke bestehend aus Leiteroperatoren aus.

- c) (10 p.) Zeige ohne einen expliziten Ausdruck für  $\langle x | n \rangle$  auszunutzen, dass

$$\langle n | \hat{p} | m \rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{nm}$$

*Hinweis:* Drücke  $\hat{p}$  durch Ausdrücke bestehend aus Leiteroperatoren aus.

d) (10 p.) Bestimme mit gegebenem  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$  die räumliche Darstellung des Hamiltonian

$$\langle x | \hat{H} | x' \rangle = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \delta(x - x').$$

Beachte, dass wir die "übliche" Operatorform des Hamiltonian erhalten, wenn wir diesen in obiger Form auf Zustände in räumlicher Darstellung wirken lassen:

$$\int dx' \langle x | \hat{H} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle = \int dx' \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \delta(x-x') \langle x' | \psi \rangle = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \langle x | \psi \rangle,$$

wobei  $\langle x | \psi \rangle \equiv \psi(x)$ .

Beachte, dass alle Vektoren und Operatoren Größen sind, welche invariant unter Basiswechsel sind. Darstellungen in gewählten Basen (Räumen) sind einfach verschiedene Wege um dieselbe Größe zu beschreiben.

## Übung 2. Hermitesche Operatoren (30 Punkte)

In dieser Übung wirst du ein paar Theoreme beweisen, welche für die Quantenmechanik höchst relevant sind.

- a) (5 p.) **Theorem I:** Falls zwei Operatoren  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  kommutieren und  $|\psi\rangle$  ein Eigenvektor von  $\hat{A}$  ist, so ist  $\hat{B}|\psi\rangle$  ebenfalls ein Eigenvektor von  $\hat{A}$  mit den selben Eigenwerten.
- b) (5 p.) **Theorem II:** Falls zwei Observablen  $A$  und  $B$  kommutieren und  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$  zwei Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten von  $\hat{A}$  sind, so verschwindet das Matrixelement  $\langle \psi_1 | \hat{B} | \psi_2 \rangle$ .
- c) (15 p.) **Theorem III:** Falls zwei Observablen  $A$  und  $B$  kommutieren, kann man für  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  eine gemeinsame Orthonormalbasis aus Eigenvektoren konstruieren. Betrachtet nur den Fall, in welchem die Spektren von  $A$  und  $B$  diskret sind.

*Hinweis:* Da  $A$  eine Observable ist, gibt es mindestens eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $\hat{A}$ :

$$\hat{A} |u_n^i\rangle = a_n |u_n^i\rangle, \quad n = 1, 2, \dots \quad i = 1, 2, \dots, g_n,$$

wobei  $g_n$  der Grad der Entartung der Eigenwerte  $a_n$  beschreibt und  $\langle u_n^i | u_m^j \rangle = \delta_{nm} \delta_{ij}$  gilt. Diskutiere die Matrixelemente  $\langle u_n^i | \hat{B} | u_m^j \rangle$ .

d) (5 p.) Zeige die Umkehrung von Theorem III.

## Übung 3. Operatoren und Dirac Notation (35 Punkte)

a) (5 p.) Betrachte die Leiteroperatoren für das Problem des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Zeige, dass

$$\hat{a}_+ = (\hat{a}_-)^{\dagger}.$$

b) (5 p.) Zeige, dass für jede Observable  $\hat{q}$  mit *nicht-entartetem* Spektrum gilt

$$\hat{q} = \sum_q q |q\rangle \langle q|,$$

wobei  $\hat{q} |q\rangle = q |q\rangle$  und im Fall eines kontinuierlichen Spektrums  $\sum_q \rightarrow \int dq$  gilt.

*Hinweis:* Da die Menge der Eigenfunktionen vollständig und orthonormal ist, kann die folgende Vollständigkeitsrelation genutzt werden:

$$\sum_q |q\rangle \langle q| = \hat{1}.$$

c) (5 p.) Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}.$$

Zeige nun, dass

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \langle p|\psi\rangle.$$

d) (5 p.) Zeige, dass

$$\langle \psi|\hat{x}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \phi^*(p) \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right] \phi(p),$$

wobei

$$\phi(p) \equiv \langle p|\psi\rangle$$

e) (5 p.) Zeige, dass

$$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x').$$

f) (10 p.) Erinnere dich an die Wellenfunktion des stationären Zustandes im unendlichen rechteckigen Potentialtopf

$$\langle x|n\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) & 0 < x < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne  $\langle p|n\rangle$ .