

Exercise sheet 5
Theoretical Physics 3: QM WS2022/2023
Lecturer: Prof. Dr. M. Vanderhaeghen

23.11.2022

Übung 1. Endlicher quadratischer Potentialtopf (20 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem endlichen quadratischen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2a} & \text{for } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{for } x > |a| \end{cases}.$$

Die Energielevel sind durch folgende Bedingung gegeben:

$$z \tan z = \sqrt{z_0^2 - z^2}$$

wobei

$$z = \frac{a}{\hbar} \sqrt{2m \left(E + \frac{\alpha}{2a} \right)}, \quad z_0 = \frac{a}{\hbar} \sqrt{\frac{m\alpha}{a}}.$$

- a) (10 p.) Betrachte das Limit $a \rightarrow 0$ und nimm an, E sei in diesem endlich. Zeige, dass du den eindeutigen gebundenen Zustand des δ -Potentials $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ erhältst.
- b) (10 p.) Was muss der Wert von $m\alpha a/\hbar^2$ sein, damit das System exakt n gebundene Zustände hat?

Übung 2. Asymmetrischer endlicher quadratischer Potentialtopf (35 + 10 Punkte)

Betrachte die Schrödingergleichung mit dem folgenden Potential:

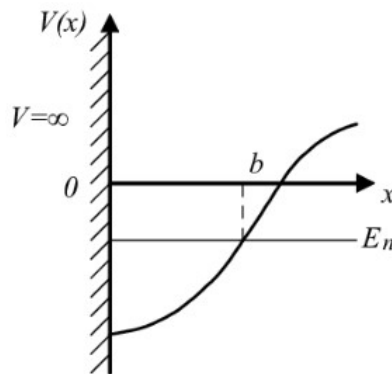
$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ V_1 & x > a. \end{cases}$$

- a) (10 p.) Betrachte gebundene Zustände des Systems ($E < 0$). Leite die transzendente(n) Gleichung(en) für die Energie-Quantenzahl her. Beachte, dass im Fall $V_1 = 0$ die Ausdrücke der endlichen Potentialwand aus der Vorlesung erhalten werden sollten.
- b) (10 p.) Schreibe die Eigenfunktionen für den Hamiltonoperator im Fall $0 < E < V_1$. Skizziere eine Eigenfunktion für einen mittleren Wert von E .
- c) (5 p.) Zeige, dass im Limit $V_1 \rightarrow +\infty$ die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators für $x > a$ verschwinden.
Stimmt es, dass nicht nur die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators, sondern *alle* alle Wellenfunktionen für $x > a$ verschwinden müssen?

- d) (10 p.) Betrachte die gestreuten Zustände für den Fall $E > V_1$. Leite Ausdrücke für die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten her.
- e) (10 p.)(*Bonus*) Betrachte das Limit $V_1 \rightarrow +\infty$. Beweise, dass das System keine gebundenen Zustände zulässt genau dann wenn $V_0 \leq \pi^2 \hbar^2 / (8ma^2)$.

Übung 3. WKB-Näherung (30 + 10 points)

Betrachten Sie das in der folgenden Abbildung gezeigte Potenzial $V(x)$:



Rechts von dem Wendepunkt b hat die Wellenfunktion die semi-klassische Form:

$$\Psi(x) = \frac{C}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p(x)| dx\right), \quad x > b.$$

In dem Bereich $x < b$ wird die Wellenfunktion beschrieben durch:

$$\Psi(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b p(x) dx + \frac{\pi}{4}\right), \quad x < b.$$

- a) (5 p.) Leite die folgende Beziehung der Energieniveaus her:

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^b \sqrt{2m[E_n - V(x)]} dx = \pi \left(n + \frac{3}{4}\right).$$

- b) (5 p.) Betrachte nun das explizite Potential:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x^2} & \text{für } x \geq a \\ \infty & \text{für } x < a \end{cases} \quad \alpha > 0.$$

Unter welchen Bedingungen und für welche Werte von x kann die semi-klassische Näherung verwendet werden?

- c) (10 p.) Leite mit dem Ergebnis von a) und mithilfe einer Integration die Beziehung der Energieniveaus E_n her.
- d) (10 p.) Finde einen expliziten Ausdruck für die oberen Energieniveaus, welche durch die Bedingung $|E_n| \ll \alpha/a^2$ definiert sind. Erweitere das Ergebnis von c) mit dem kleinen Parameter $|E_n|a^2/\alpha$. Behalte nur die führende Ordnung. Wie verändert sich der Abstand der Energieniveaus mit wachsendem n ?
- e) (10 p.)(*Bonus*). Finde die explizite Form der Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$.

Übung 4. Matrizen: Eigenwerte und Eigenvektoren (15 Punkte)

a) (2 p.) Betrachte die drei Pauli-Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Berechne σ_x^2 , σ_y^2 , σ_z^2 , sowie die Kommutatoren $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_y, \sigma_z]$, $[\sigma_z, \sigma_x]$.

b) (3 p.) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_x , σ_y and σ_z .

c) (5 p.) Berechne ebenso die Eigenwerte und Eigenvektoren der 2D- and hyperbolischen Drehungsmatrizen:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix}.$$

d) (5 p.) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden 3×3 Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$