Übungsblatt 4
Theoretische Physik 3: WS2022/2023
Dozent: Prof. Dr. M. Vanderhaeghen

16.11.2022

Übung 1. Fourier Transformation. (45 points)

Wir definieren die (räumliche) Fourier-Transformation (FT) einer Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ und die korrespondierende inverse Transformation als

$$\Phi(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t) e^{-ikx} \mathrm{d}x,$$
$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k,t) e^{ikx} \mathrm{d}k.$$

Berechnen Sie die Fourier-Transformationen der folgenden Gleichungen

a) *(2 p.)* $\Psi(x) = \delta(x)$ und $\Psi(x) = \delta(x - x_0)$

b) *(2 p.)* $\Psi(x) = a = \text{const}$

c) *(4 p.)* $\Psi(x) = \cos(x)$

d) *(7 p.)* $\Psi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

e) *(10 p.)* Nutzen Sie die FT um die Schrödinger-Gleichung des Harmonischen Oszillators *im k-Raum* darzustellen.

Hinweis: Benutzen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{ax} \mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \mathrm{d}x$

f) *(10 p.)* Geben Sie die SG mit einem beliebigen Potential *im k-Raum* an.
Gehen Sie davon aus, dass das Potential als Potenzreihe $V(x) = \sum_n a_n x^n$ darstellbar ist.

g) *(10 p.)* Lösen Sie die eindimensionale SG eines *freien Teilchens im k-Raum.*
Führen Sie anschließend die inverse FT aus, um die allgemeine Lösung im x-Raum zu finden.

Übung 2. Doppeltes δ-Potential. (55 points)

Betrachten Sie das folgende eindimensionale Modellpotential für ein Molekül mit einem doppelt entarteten Zustand:

$$V(x) = -V_0 a \left(\delta(x-a) + \delta(x+a) \right),$$

wobei V_0 und a reele Parameter sind.

a) *(5 p.)* Wenden Sie eine Fouriertransformation auf die dazugehörige Schrödinger Gleichung an, $\hat{H}(x)\psi(x) = E\psi(x)$. Zeigen Sie, dass dies im Impulsraum folgendermaßen aussieht

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\phi(k) - \frac{V_0 a}{\sqrt{2\pi}}\left(\psi(a)e^{-ika} + \psi(-a)e^{ika}\right) = E\phi(k),$$

wobei

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ikx}\psi(x) \quad \text{und} \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{ikx}\phi(k).$$

b) *(15 p.)* Unter Verwendung der erhaltenen Schrödinger-Gleichung im Impulsraum finden Sie die gebundenen Zustände des Systems im Koordinatenraum. Wie viele gebundene Zustände hat das System?
Tipp: Die Lösung muss an den Punkten $x = \pm a$ konsistent sein.

c) *(10 p.)* Für $V_0 a = \frac{\hbar^2}{ma}$, finden Sie die Energien der stationären Zustände. Skizzieren Sie die entsprechenden Wellenfunktionen.
Tipp: Nutzen Sie die Tatsache, dass es gerade und ungerade Lösungen gibt.

d) *(10 p.)* Diskutieren Sie die Rolle des Parameters a für die stationären Zustände (betrachten Sie $a \to 0$ und $a \to \infty$).

e) *(15 p.)* Finden Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für einen Strahl von Teilchen in diesem Potential.