Übungsblatt 3
Theoretische Physik 3: WS2022/2023
Dozent: Prof. Dr. M. Vanderhaeghen

09.11.2022

Übung 1. Aufsteigeoperatoren (35 Punkte)

Betrachte einen quantenmechanischen Harmonischen Oszillator (HO), dessen zeitunabhängige Grundzustandswellenfunktion gegeben ist durch

$$\Psi_0(x, t=0) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \equiv \alpha e^{-\frac{y^2}{2}},$$

wobei zur Vereinfachung $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$ und die dimensionslose Variable $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ eingeführt wurde.

a) *(5 p.)* Nutze die explizite Definition des Aufsteigeoperators

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + y\right),$$

um einen Ausdruck für die Wellenfunktion Ψ_1 des ersten angeregten Zustandes zu finden und prüfe deren Orthogonalität mit Ψ_0.

b) *(20 p.)* Bestimme $\langle x\rangle, \langle p\rangle, \langle x^2\rangle$ und $\langle p^2\rangle$ für Ψ_0 und Ψ_1 durch explizite Integration.

c) *(5 p.)* Überprüfe für beide Zustände die Unschärferelation.

d) *(5 p.)* Berechne die Erwartungswerte der kinetischen Energie $\langle T\rangle$ und der potentiellen Energie $\langle V\rangle$. Überprüfe, dass sich beide zu $\langle H\rangle$ addieren.

Übung 2. Potenzreihenmethode (65 Punkte)

Der quantenmechanische HO lässt sich über einen Potenzreihenansatz lösen. Dazu beginnt man mit der stationären Schrödinger-Gleichung ($\Psi'' \equiv \mathrm{d}^2\Psi/\mathrm{d}x^2$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\Psi(x) = E\,\Psi(x).$$

a) *(10 p.)* Um die Problemstellung zu vereinfachen, umschreibe die obige Gleichung mit den dimensionslosen Größen

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \quad \varepsilon = E/\hbar\omega.$$

Definiere außerdem $\varphi(y) = c\Psi(x)$ und bestimme c so dass $\varphi(y)$ normiert ist.

b) *(10 p.)* Untersuche das asymptotische Verhalten der Gleichung für große y. Zeige, dass für $y \to \infty$

$$\varphi(y) \sim e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

c) *(10 p.)* Nun kann das asymptotische Verhalten der unbekannten Funktion explizit ausgedrückt werden:

$$\varphi(y) = h(y)\, e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Leite folgende Gleichung für $h(y)$ her:

$$h'' - 2yh' + (2\varepsilon - 1)h = 0.$$

d) *(15 p.)* Setze nun voraus, dass $h(y)$ als unendliche Potenzreihe in y geschrieben werden kann

$$h(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, y^m.$$

Bestimme die Rekursionsrelation zwischen den Koeffizienten a_m und zeige, dass sich zwei unabhängige Lösungsmengen (*gerade* und *ungerade*) ergeben.

Zeige, dass die unendliche Reihe an einem endlichen n abgeschnitten werden muss: $a_{m>n} = 0$, damit die Wellenfunktion endlich und normierbar bleibt.
(*Hinweis*: Betrachte die Maclaurin-Entwicklung von e^{y^2} und vergleiche sie mit dem Verhalten der Reihe für große y).

e) *(15 p.)* Zeige, dass die unendliche Potenzreihe an einer natürlichen Zahl n "abgeschnitten" werden muss, damit die Wellenfunktion endlich und normalisierbar ist: $a_{m>n} = 0$.
(*Tipp*: Betrachte die Maclaurin Reihe von e^{y^2} und vergleiche sie mit dem Verhalten der Reihe für große y).

f) *(5 p.)* Obige Schlussfolgerung ausnutzend, zeige, dass die Energie durch $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ quantisiert ist.

Die resultierenden Polynome $h_n(y)$sind proportional zu den *Hermiteschen Polynome* $H_n(y)$. Die orthonormale Lösungsmenge der ursprünglichen Schrödinger-Gleichung ergibt sich somit zu:

$$\Psi_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}\right)^{-\frac{1}{2}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \quad n = \overline{0,\infty}.$$

(Bonus) **Übung 3. Supersymmetrische QM (50 Punkte)**

In dieser Aufgabe wird eine Verallgemeinerung der Auf- und Absteigeoperatoren betrachtet. Für ein gegebenes Potential $V_-(x)$, wird hierbeit ein Partnerpotential $V_+(x)$ konstruiert, welches die identischen Eigenwerte besitzt, bis auf den Grundzustand. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann nun das Potential $V_-(x)$ so verschoben werden, dass der zugehörige Grundzustand $\psi_0(x)$ eine verschwindende Energie $E_0^- = 0$ besitzt.

a) *(10 p.)* Zeige, dass der Hamiltonian $\hat{H}_- = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_-$ in folgender Form schreiben lässt

$$\hat{H}_- = \hat{A}^+\hat{A}$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{A}^+ &\equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\psi_0'}{\psi_0}), \\ \hat{A} &\equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\psi_0'}{\psi_0}), \end{aligned}$$

und $\psi_0' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_0$.

b) *(10 p.)* Betrachte nun den Partner-Hamiltonian $\hat{H}_+ = \hat{A}\hat{A}^+$, welcher auch als $\hat{H}_+ = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_+$ definiert werden kann. Zeige, dass für die Potentiale V_+ und V_- folgende Beziehung gilt:

$$V_+ = V_- - \frac{\hbar^2}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi_0'}{\psi_0}\right)$$

c) *(15 p.)* Zeige, dass $\hat{H}_-$ und $\hat{H}_+$, bis auf den Grundzustand, das gleiche Spektrum besitzen (*Tipp*: Betrachte die Zustände $\hat{A}\psi_n^-$ und $\hat{A}^+\psi_n^+$, wobei $\Psi_n^\pm$ Eigenzustände von $\hat{H}_\pm$ sind). Stelle die Eigenzustände ψ_n^+ und Energien E_n^+ in Abhängigkeit von ψ_n^- und E_n^- dar.

d) *(15 p.)* Betrachte nun ein Teilchen im unendlichen Kastenpotential

$$V_-(x) = \begin{cases} V_0 & \text{for} \quad 0 \leq x \leq a \\ +\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

Bestimme V_0, sodass der Grundzustand $E_0^- = 0$ besitzt. Berechne das Partnerpotential $V_+(x)$. Bestimme die korrekt normierten Eigenzustände $\psi_n^+(x)$. Erkläre warum das Auftreten von Partnerpotentialen nützlich sein könnte.