

$$\vec{S} := \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli-Matrizen

(Matrixdarstellung der Spin-Op. \vec{S} in der Basis der Eigenzustände, bis auf Faktor $\hbar/2$)

Eigenschaften:

$$(a) \quad [\sigma_j, \sigma_k] = 2i \epsilon_{jkl} \sigma_l$$

$$(b) \quad \sigma_j^2 = \mathbb{1}, \quad j=1,2,3$$

$$(c) \quad \{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{kj}$$

$$(d) \quad \begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2) \\ &\stackrel{(c)}{=} \frac{1}{2} (\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1) = \frac{1}{2} [\sigma_1, \sigma_2] \stackrel{(a)}{=} i\sigma_3 \end{aligned}$$

(zyklisch)

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \epsilon_{jkl} \sigma_l$$

$$(e) \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 : \quad \underline{(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}$$

6.3 Drehungen von Spinoren

Abschnitt 4: Drehung von Orthonormalfunktionen $\psi(\vec{x})$, bzw. dem dazugehörigen Kets $|\psi\rangle$:

$$\vec{x}' = \underline{R}(\vec{\varphi}) \vec{x} \qquad \psi'(\vec{x}) = \mathcal{D}(\underline{R}) \psi(\vec{x})$$

$$|\psi'\rangle = \mathcal{D}(\underline{R}) |\psi\rangle$$

$\mathcal{D}(\underline{R})$: Darstellung der Rotationsmatrix $\underline{R} \in SO(3)$ wirkt auf Zustände (kets) im Hilbertraum.

Aufgabe: finde Darstellung $\mathcal{D}(\underline{R})$, die auf Spinoren d.h. 2-komp. komplexe Vektoren wirkt:

$$|\alpha\rangle = |+\rangle\langle +|\alpha\rangle + |-\rangle\langle -|\alpha\rangle = c_{\alpha}^{(+)} |+\rangle + c_{\alpha}^{(-)} |-\rangle$$

\Leftrightarrow

$$\chi_{\alpha} = c_{\alpha}^{(+)} \chi_{+} + c_{\alpha}^{(-)} \chi_{-} = c_{\alpha}^{(+)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{\alpha}^{(-)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\alpha}^{(+)} \\ c_{\alpha}^{(-)} \end{pmatrix}$$

$\{|+\rangle, |-\rangle\}$, bzw. $\{\chi_{+}, \chi_{-}\}$ spannen den 2-dim. Hilbertraum \mathbb{R}_2 auf. Wie transformiert sich ein beliebiger Spinor $\chi \in \mathbb{R}_2$ unter Drehungen?

Bahndrehimpuls : $\mathcal{D}(\underline{R}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{\varphi} \cdot \vec{L}\right) \equiv \mathcal{D}(\vec{L}, \vec{\varphi})$

\vec{L} erzeugt Drehungen $\Leftrightarrow [L_j, L_k] = i\hbar \epsilon_{jkl} L_l$

\vec{S} erzeugt Drehungen im Hilbertraum der Spinzustände:

$$D(\vec{S}; \hat{n}, \varphi) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{\varphi} \cdot \vec{S}\right) \quad \hat{n} = \vec{\varphi} / \varphi, \quad \varphi = |\vec{\varphi}|$$

\uparrow Achse, $|\hat{n}| = 1$ \nwarrow Winkel

$$[S_i, S_k] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_l$$

Finde Darstellung von $\exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{\varphi} \cdot \vec{S}\right)$ als 2x2 Matrix:

Pauli-Matrizen:

$$D(\vec{S}; \hat{n}, \varphi) = \exp\left(\frac{i}{2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}\right) = \exp\left(\frac{i}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \varphi\right)$$

Betrachte:

$$(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = \underbrace{1}_{(e)} \underbrace{\hat{n} \cdot \hat{n}}_1 + i \underbrace{\vec{\sigma} \cdot (\hat{n} \times \hat{n})}_0$$

$$m = 2n \text{ or } m = 2n+1$$

$$\Rightarrow (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^m = \begin{cases} 1 & m \text{ gerade} \\ (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) & m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (**)$$

Reihenentwicklung von $\exp\left(\frac{i}{2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}\right)$:

$$\exp\left(i (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2}{2!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \frac{(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^4}{4!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^4 - \dots$$

$$+ i \left\{ (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^3}{3!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \dots \right\}$$

$$= \mathbb{1} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i n_3 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & (n_2 + i n_1) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ (-n_2 + i n_1) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i n_3 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{D}(\hat{n}, \varphi)$$

Bemerkungen:

(1) $\mathcal{D}(\hat{n}, \varphi)$ ist unitär: $\mathcal{D}^\dagger(\hat{n}, \varphi) \mathcal{D}(\hat{n}, \varphi) = \mathbb{1}_2$

$$\begin{aligned} \det\{\mathcal{D}(\hat{n}, \varphi)\} &= \cos^2\frac{\varphi}{2} + n_3^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + (n_2^2 + n_1^2) \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \cos^2\frac{\varphi}{2} + |\hat{n}|^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$\rightarrow \mathcal{D}(\hat{n}, \varphi)$ ist ein Element der Gruppe $SU(2)$

$$SU(2) = \{ U \in \mathbb{C}_{2 \times 2} \mid U^{-1} = U^\dagger, \det U = 1 \}$$

\rightarrow Drehungen können sowohl durch die Gruppe $SO(3)$ als auch durch $SU(2)$ ausgedrückt werden

(2) Jeder $U \in SU(2)$ kann durch

$$U = U(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$|a|^2 + |b|^2 = 1$ parametrisiert werden

a, b (zwei reelle - Klein'sche Parameter

Außer dem läßt sich jedes $U \in SU(2)$ schreiben als

$$U = \mathbb{1} r_0 + i \vec{\sigma} \cdot \vec{r} \quad , \quad r_0^2 + \vec{r}^2 = 1$$

Für $D(\hat{n}, \varphi)$: $r_0 = \cos \frac{\varphi}{2}$, $r_j = n_j \sin \frac{\varphi}{2}$, $\hat{n}^2 = 1$

(A) Wg. $r_0^2 + \vec{r}^2 = 1$ sagt man: $SU(2)$ ist die Einheitskugel in 4 Dimensionen

(B) Man kann zeigen dass

$U(a, b)$ und $U(-a, -b)$ derselben $SO(3)$ -Matrix entsprechen; $SU(2)$ und $SO(3)$ sind nicht isomorph



Ortswellenfunktion:

$$\vec{x}' = \underline{R}(\vec{\varphi}) \vec{x} \quad \iff \quad \psi'(\vec{x}') = \mathcal{D}(\underline{R}) \psi(\vec{x})$$

(*)

Spinorformalismus: $\chi' = \exp\left(\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}\right) \chi$

Was ist das Analogon zu (*)? (χ ist kein Objekt im Ortsraum ...)

Das Objekt $\vec{a} := \chi^\dagger \vec{\sigma} \chi$ ist ein Vektor im \mathbb{R}^3 .

Zu zeigen:

$$\chi' = \exp(i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \frac{\varphi}{2}) \chi \iff \vec{a}' = \underline{R}(\hat{n}, \varphi) \vec{a}$$

$$\text{mit } \vec{a}' = \chi'^{\dagger} \vec{\sigma} \chi'$$

d.h.

$$\chi'^{\dagger} \exp(-i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \frac{\varphi}{2}) \vec{\sigma} \exp(i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \frac{\varphi}{2}) \chi = \underline{R}(\hat{n}, \varphi) \chi'^{\dagger} \vec{\sigma} \chi$$

Betrachte infinitesimale Drehung: $\hat{n} \cdot \varphi = \delta \vec{\varphi}$

$$(\mathbb{1} - i \frac{1}{2} \delta \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}) \sigma_k (\mathbb{1} + i \frac{1}{2} \delta \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma})$$

$$= \sigma_k - \frac{i}{2} [\delta \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}, \sigma_k] + O(\delta \varphi^2)$$

$$= \sigma_k - \frac{i}{2} \delta \varphi_j [\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_k - \frac{i}{2} \delta \varphi_j \epsilon_{jkl} \sigma_l 2i$$

$$= \sigma_k - (\delta \vec{\varphi} \times \vec{\sigma})_k \implies \vec{\sigma} \rightarrow \vec{\sigma} - \delta \vec{\varphi} \times \vec{\sigma}$$

(Abschnitt 4.1)

$$= \underline{R}(\delta \vec{\varphi}) \vec{\sigma}$$

Optional:

$$\text{Betrachte } \hat{n} \cdot \vec{\sigma} = \sigma_3$$

$$(\mathbb{1} \cos \frac{\varphi}{2} - i \sigma_3 \sin \frac{\varphi}{2}) \sigma_k (\mathbb{1} \cos \frac{\varphi}{2} + i \sigma_3 \sin \frac{\varphi}{2})$$

$$= \sigma_k \cos^2 \frac{\varphi}{2} + i [\sigma_k, \sigma_3] \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \sigma_3 \sigma_k \sigma_3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$



~~4~~ $k=3$:

$$\sigma_3 \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = \sigma_3$$

$k \neq 3$:

$$\begin{aligned} & \sigma_k \cos^2 \frac{\varphi}{2} + i 2i \varepsilon_{k3l} \sigma_l \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \sigma_k \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ &= \sigma_k \underbrace{\left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)}_{\cos \varphi} - \varepsilon_{k3l} \sigma_l \underbrace{2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}}_{\sin \varphi} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_1 \rightarrow \sigma'_1 = \sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi$$

$$\sigma_2 \rightarrow \sigma'_2 = \sigma_2 \cos \varphi - \sigma_1 \sin \varphi$$

$$\sigma_3 \rightarrow \sigma'_3 = \sigma_3$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

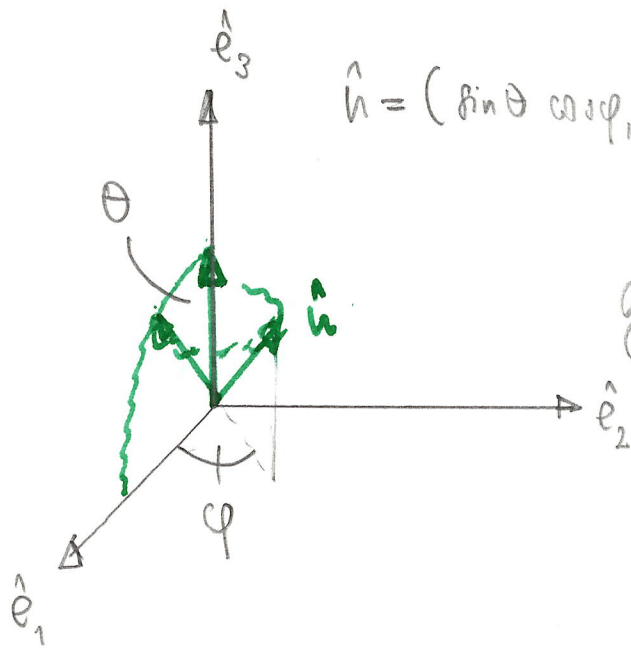


Anwendung:

Konstruktion der Eigen spinoren des Spin operators in beliebiger Richtung \hat{n} ; $\hat{n} \cdot \vec{\sigma}$, zum Eigenwert $+1$:

$$(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \chi = \chi$$

Gegeben: Eigen spinor χ_+ von $\sigma_3 \equiv \hat{e}_3 \cdot \vec{\sigma}$



$$\hat{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

↙ mit
convention

Entspricht aktiver Rotation

gegen ~~den~~ Uhrzeiger im um Winkel
 $\theta, \varphi \Rightarrow$ angles given in
with respect to \hat{n}

~~aktive Rotation entgegen~~

~~Uhrzeiger im um Winkel
 $2\pi - \theta, 2\pi - \varphi$~~

Subzentrierte Anwendung der Darstellungsmatrix der Rotationen:

$$\chi_+ \rightarrow \chi = D(\hat{e}_3, -\varphi) D(\hat{e}_2, -\theta) \chi_+$$

$$= \left(\mathbb{1} \cos \frac{\varphi}{2} - i \sigma_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left(\mathbb{1} \cos \frac{\theta}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{---} \parallel \text{---} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

Falls $\hat{n} = \hat{e}_1$: $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0 \Rightarrow \chi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dasselbe Ergebnis erhält man durch explizite
Diagonalisierung von $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = x_1 = a$$

$$2a^2 = 1 : \text{ Normierung} \Rightarrow \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

6.4 Spin- und Ortswellenfunktionen

Eigenketten von σ_3 , $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ bilden Basis des 2-dim. Hilbertraums der Spinzustände

Erhalte Eigenzustände zu beliebigen Spinprojektionen $\hat{n} \cdot \vec{\sigma}$ durch geeignete Linearkombinationen von $|+\rangle, |-\rangle$

$$|\alpha\rangle = c_{\alpha}^{(+)} |+\rangle + c_{\alpha}^{(-)} |-\rangle, \quad c_{\alpha}^{(\pm)} = \langle \pm | \alpha \rangle$$

$|\vec{x}\rangle$ bezeichne den Zustand eines Teilchens in der Ortsdarstellung, Eigenketten des Ortsoperators

Spin ist unveränderliche Eigenschaft des Teilchens, die nicht vom Bewegungszustand und nicht von \vec{x} abhängt:

$|\sigma\rangle$ beschreibt Spin-Freiheitsgrade

↳ der komplette Zustand des Elektrons wird durch den

$$\text{Vkt} \quad |\vec{x}\rangle \otimes |\sigma\rangle \equiv |\vec{x}; \sigma\rangle, \quad \sigma = \pm$$

beschrieben.

$\{|\vec{x}; \sigma\rangle\}$ ist eine Basis des Produkttraums

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_2$$

Ein Operator im Unterraum, der durch $\{|\vec{x}\rangle\}$ aufgespannt wird, kommutiert mit Operatoren in \mathcal{H}_2

$|\psi\rangle$: beliebiger Zustand in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_2$

$$\mathbb{1} = \sum_{\sigma=\pm} \int d^3x |\vec{x}; \sigma\rangle \langle \sigma; \vec{x}|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\psi\rangle &= \sum_{\sigma} \int d^3x |\vec{x}; \sigma\rangle \langle \sigma; \vec{x} | \psi\rangle \\ &= \sum_{\sigma} \int d^3x \psi_{\sigma}(\vec{x}) |\vec{x}; \sigma\rangle \end{aligned}$$

↪ die Komponenten $\langle \sigma; \vec{x} | \psi\rangle \equiv \psi_{\sigma}(\vec{x})$ werden durch die Wellenfunktionen $\psi_{\sigma}(\vec{x})$ zum Zustand $\sigma = \pm$ dargestellt.

↪ die Gesamtwellenfunktion ist zweikomponentig:

$$\Psi(\vec{x}, t) \equiv \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{x}, t) \\ \psi_-(\vec{x}, t) \end{pmatrix}, \quad \Psi^{\dagger}(\vec{x}, t) = (\psi_+^*(\vec{x}, t), \psi_-^*(\vec{x}, t))$$

Skalarprodukt zweier Gesamtwellenfunktionen Ψ, Φ :

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Phi \rangle &= \int d^3x \Psi^{\dagger}(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) \\ &= \int d^3x (\psi_+^*(\vec{x}), \psi_-^*(\vec{x})) \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{x}) \\ \psi_-(\vec{x}) \end{pmatrix} = \sum_{\sigma=\pm} \int d^3x \psi_{\sigma}^*(\vec{x}) \psi_{\sigma}(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{\sigma=\pm} \int d^3x |\psi_{\sigma}|^2 = 1$$

$|\psi_{\sigma}(\vec{x})|^2$: Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, das Elektron am Ort \vec{x} mit Spin σ anzutreffen

$|\psi_{+}|^2 + |\psi_{-}|^2$: Wahrsch. dichte dafür, das Elektron am Ort \vec{x} anzutreffen, ohne zu unterscheiden, wie der Spin ausgerichtet ist,

Erwartungswerte des Spin Operators:

$$\langle \psi | \vec{\sigma} | \psi \rangle = \int d^3x \psi^{\dagger}(\vec{x}) \vec{\sigma} \psi(\vec{x})$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \sigma_3 | \psi \rangle &= \int d^3x (\psi_{+}^{*}, \psi_{-}^{*}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{+} \\ \psi_{-} \end{pmatrix} \\ &= \int d^3x (|\psi_{+}|^2 - |\psi_{-}|^2) \end{aligned}$$

☺

Dre Vorräume im Produktraum:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

Operatoren, die in den Räumen \mathcal{H}_1 , bzw. \mathcal{H}_2 wirken vertauschen.

Der Gesamtdrehimpuls eines Elektrons setzt sich aus seinem Bahndrehimpuls und seinem Spin zusammen:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{L} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}$$

\vec{L} und \vec{S} wirken jeweils in den Hilberträumen \mathcal{H}_x und \mathcal{H}_s

$$\mathcal{D}(\vec{J}; \hat{n}, \varphi) = \mathcal{D}(\vec{L}; \hat{n}, \varphi) \otimes \mathcal{D}(\vec{S}; \hat{n}, \varphi)$$

↖
Gesamtdrehimpuls

$$= \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{L} \varphi\right) \otimes \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{S} \varphi\right)$$

Wir bringen auf Gesamtwellenfunktion $\Psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{x}) \\ \psi_-(\vec{x}) \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{D}(\vec{J}; \hat{n}, \varphi) \Psi(\vec{x}) = \underbrace{\mathcal{D}(\vec{S}; \hat{n}, \varphi)}_{2 \times 2 \text{ Matrix}} \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\vec{L}; \hat{n}, \varphi) \psi_+(\vec{x}) \\ \mathcal{D}(\vec{L}; \hat{n}, \varphi) \psi_-(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \mathcal{D}(\vec{S}; \hat{n}, \varphi) \equiv \exp\left(i \hat{n} \cdot \vec{S} \frac{\varphi}{\hbar}\right) = \mathbb{1} \cos \frac{\varphi}{2} + i (\hat{n} \cdot \vec{S}) \sin \frac{\varphi}{2}$$

Es fehlt noch die explizite Konstruktion der $\mathcal{D}(\vec{L}; \hat{n}, \varphi)$
(siehe z.B. Sakurai, Kap. 3.5; Scheck, Kap. 4.1)

Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ erzeugt
räumliche Drehungen

6.5 Magnetisches Moment von Teilchen mit Spin- $\frac{1}{2}$

Bahndrehimpuls erzeugt magnetisches Moment, z.B. für ein Elektron:

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2m_e c} \vec{l} = -\frac{|e|\hbar}{2m_e c} \vec{l} \equiv -\mu_B \vec{l}$$

Der Spin erzeugt ebenfalls ein magnetisches Moment:

$$\vec{\mu}_s = g \frac{e}{2m_e c} \vec{S} = -g \frac{|e|\hbar}{2m_e c} \vec{s} = -g \mu_B \vec{s} \quad (\vec{S} = \vec{s}\hbar)$$

Hierbei heißt g : gyromagnetischer Faktor;
Landé-Faktor

Für elektrisch geladene Teilchen ist g in erster Näherung gleich 2 (anomaler g -Faktor)

Optional:

Der Wert $g=2$ läßt sich aus der nicht-relativistischen QM ("Dirac-Gleichung") herleiten.

Der nicht-relativistische Grenzfall der Dirac-Gleichung (wie diese aussieht und warum der unten stehende Ausdruck der nicht-rel. Grenzfall sein soll, wird hier nicht erörtert) liefert

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\sigma} \right]^2 + e\phi$$

Nebenbw ist

$$\begin{aligned} \left[(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \right]^2 &= (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \times (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \\ &= (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 - i \frac{e}{c} \vec{\sigma} \cdot [\vec{p} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{p}] \end{aligned}$$

$$[\dots]_k^* = \frac{\hbar}{i} \varepsilon_{klm} (\partial_l A_m + A_l \partial_m)^*$$

$$= \frac{\hbar}{i} \varepsilon_{klm} \left((\partial_l A_m) + A_m \partial_l + A_l \partial_m \right)^*$$

antisymm.
in l, m

0 \leftarrow symm. in l, m

$$= \frac{\hbar}{i} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \frac{\hbar}{i} B_k$$

Daher

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{1}{2m} i \frac{e}{c} \frac{\hbar}{i} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e\phi$$

$$= \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - 2 \frac{e\hbar}{2mc} \vec{s} \cdot \vec{B} + e\phi$$

$\vec{s} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$ \uparrow $g=2$

Einsetzen in zeitabhängige Schrödinger Gleichung liefert

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_+ (\vec{x}, t) \\ \psi_- (\vec{x}, t) \end{pmatrix} = \left\{ \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi - 2 \frac{e\hbar}{2mc} \vec{s} \cdot \vec{B} \right\} \begin{pmatrix} \psi_+ (\vec{x}, t) \\ \psi_- (\vec{x}, t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t), \quad \phi = \phi(\vec{x}, t), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$$

PAULI-Gleichung

Experimentell findet man

$$g_e = 2.002\ 319\ 304\ 386\ (20)$$

Die Abweichung von 2 wird durch WW mit dem quantisierten e.m. Strahlungsfeld erzeugt:



$$g = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) \right)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

Berechnet bis einschließlich $O(\alpha)$

Die gesamte WW eines Elektrons im H-Atom mit einem schwachen äußeren Magnetfeld wird beschrieben durch

$$H = H_0 - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{l} \cdot \vec{B} - g \frac{e\hbar}{2mc} \vec{s} \cdot \vec{B} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr}}_{\text{Feinstruktur; Spin-Bahn-Kopplung}} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

wobei $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \underbrace{e\phi(r)}_{V(r)}$

Spin-Bahn-Kopplung: im Ruhesystem des Elektrons erzeugt der Kern (Proton) ein Magnetfeld das ~~mit~~ an dem Spin des Elektrons koppelt.

Das Proton im Kern ist selber ein Teilchen mit Spin $-\frac{1}{2}$.

Das induzierte magnetische Moment $\vec{\mu}_p$ ist

$$\vec{\mu}_p = g_p \frac{|e| \hbar}{2m_p c} \vec{S} \quad , \quad g_p = 5.586$$

Die WW von $\vec{\mu}_p$ mit $\vec{\mu}_e$ verursacht die **Hyperfeinstruktur**.