Beim Wasserstoffatom beobachtet man eine Aufspaltung in eine gerade Zahl von Spektrallinien.

Grund: der Spin

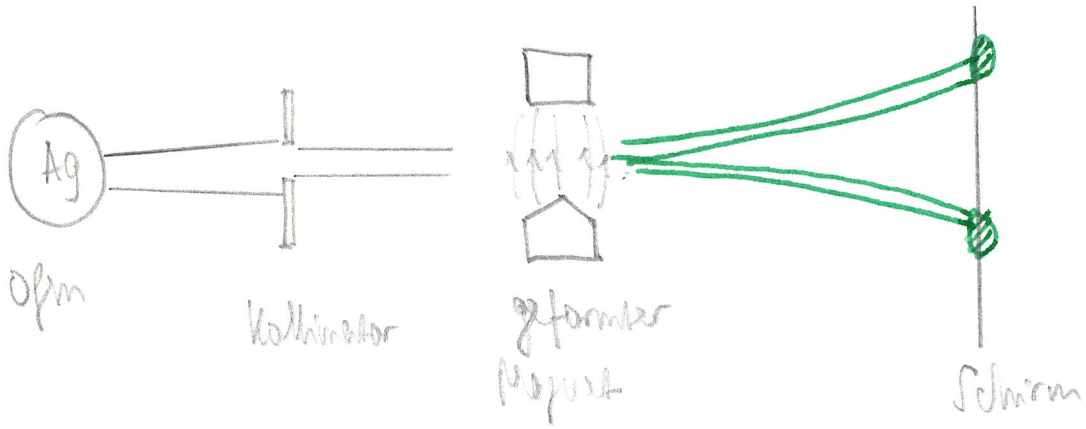
Spin: Drehimpuls, der unabhängig vom Bewegungszustand des Teilchens ist, unveränderliche Eigenschaft wie Masse und Ladung e.

6. Der Spin

Halbzahlige Werte des Bahndrehimpulses wurden ausgeschlossen; Auftreten halbzahliger Drehimpulse hinweis auf weitere "innere" Eigenschaften.

Ein experimenteller Hinweis: Dublettaufspaltung der Spektrallinien wasserstoffähnlicher Atome im Magnetfeld
→ Spinhypothese (Goudsmit + Uhlenbeck 1925)

6.1 Stern-Gerlach Experiment (1921) (Nobelpreis 1943)



Geformter Magnet erzeugt inhomogenes Magnetfeld in z-Richtung:

$$\frac{\partial B_3}{\partial x_3} \neq 0$$

Wechselwirkungsenergie: $-\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_3 B_3$

Kraft, die auf Ag-Atom in z-Richtung wirkt, ist

$$F_3 = - \frac{\partial}{\partial x_3} (-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \mu_3 \frac{\partial B_3}{\partial x_3}$$

Klassisches Teilchen: $\vec{\mu}$ kann alle kontinuierlichen Werte zwischen $-|\vec{\mu}|$ und $|\vec{\mu}|$ einnehmen

→ erwarte einzelnen "Fleck" auf Schirm

– Beobachtet werden zwei "Flecke"

$$\underbrace{\vec{\mu} \propto \vec{S}}_{\text{Drehimpuls}} \quad , \quad \mu_3 \propto S_3$$

⇒ z-Komponente des magn. Moments eines Ag-Atoms besitzt 2 Einstellmöglichkeiten. Da

– $\vec{\mu} \propto \vec{S}$, kann $\vec{S}$ kein Bahndrehimpuls sein

⇒ $\vec{S}$ ist Eigendrehimpuls des Valenzelektrons

$\vec{S}$ heißt <u>Spin</u>.

Definiere $\vec{S}$ allein über Vertauschungsregeln für Drehimpulse

$$[S_j, S_k] = i\hbar\, \epsilon_{jkl} S_l$$

6.2 Eigenzustände, Matrixdarstellung

Aus unseren allgemeinen Überlegungen zum quantenmechanischen Drehimpuls wissen wir dass $\vec{S}^2$ und S_3 gleichzeitig diagonalisierbar sind:

$$\vec{S}^2 |*\rangle = s(s+1)\hbar^2 |*\rangle \, , \quad S_3 |*\rangle = m_s \hbar \, |*\rangle$$

$|*\rangle$: Eigenket von $\vec{S}^2$, S_3; noch näher zu spezifizieren

Niedrigster halbzahliger Drehimpuls ist $s = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

Eigenkets:

$$|s, m_s\rangle \longrightarrow \begin{cases} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \equiv |+\rangle \doteq \chi_+ \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |-\rangle \doteq \chi_- \end{cases}$$

Also:
$$S_3 |\pm\rangle = \pm \frac{1}{2} \hbar \, |\pm\rangle$$

Die gemeinsamen Eigenzustände $|\pm\rangle$ von $\vec{S}^2$ und S_3 bilden eine Orthonormale Basis eines 2-dim. Hilbertraumes:

$$\langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1 \; ; \; \langle + | - \rangle = \langle - | + \rangle = 0.$$

Vollständigkeit:

$$\mathbb{1} = |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|$$

$$\mathbb{1} |+\rangle = |+\rangle \underbrace{\langle + | + \rangle}_{1} + |-\rangle \underbrace{\langle - | + \rangle}_{0} = |+\rangle \quad \checkmark.$$

Dies ergibt die Spektraldarstellung von S_3:

$$S_3 = \frac{\hbar}{2} |+\rangle\langle+| - \frac{\hbar}{2} |-\rangle\langle-| = \frac{\hbar}{2} \{ |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \}$$

(*)

Matrixdarstellung; Pauli-Formalismus

Betrachte mögliche Basisvektoren eines 2-dim. komplexen Vektorraums:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spinoren

(allgemeine 2-komp., komplexe Vektoren)

$$|+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+ , \qquad |-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_-$$

Matrixdarstellung von S_3:

$$\{S_3\} = \begin{pmatrix} \langle+|S_3|+\rangle & \langle+|S_3|-\rangle \\ \langle-|S_3|+\rangle & \langle-|S_3|-\rangle \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(S_3 ist diagonal in der Basis seiner Eigenzustände)

Definiere Leiteroperatoren:

$$S_+ |+\rangle = 0, \qquad S_+ |-\rangle = \hbar |+\rangle$$

$$S_- |-\rangle = 0, \qquad S_- |+\rangle = \hbar |-\rangle$$

$\vec{s} := \vec{S}/\hbar$, $s_+|+\rangle = 0$, $s_+|-\rangle = |+\rangle$

$(\vec{l} := \vec{L}/\hbar)$ $s_-|-\rangle = 0$, $s_-|+\rangle = |-\rangle$

$$S_\pm |\pm\rangle = 0, \quad S_\pm |\mp\rangle = \hbar |\pm\rangle$$

In der Matrixdarstellung des 2-Komp. Formalismus folgt

$$S_+|-\rangle = \hbar |+\rangle : \quad \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_+ |+\rangle = \hbar |+\rangle : \quad \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad ✓$$

Analog: $S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Wie beim Bahndrehimpuls sind $S_\pm$ definiert durch

$$S_\pm = S_1 \pm i S_2$$

$$S_+ = S_1 + i S_2 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad S_- = S_1 - i S_2 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das läßt sich realisieren durch die Wahl

$$S_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist bequemer, den Faktor $\frac{\hbar}{2}$ ganz abzuspalten

(misst Spin in Einheiten von $\frac{\hbar}{2}$)