4.2 Eigenwerte des Drehimpuls

Um Schreibarbeit zu sparen und lästige Faktoren von $\hbar$ zu vermeiden, definieren wir

$$\vec{L} =: \hbar \vec{\ell}, \qquad \vec{L}^2 = \hbar^2 \vec{\ell}^2$$

$$[L_j, L_k] = i\hbar\, \varepsilon_{jkl} L_l \iff [\ell_j, \ell_k] = i\, \varepsilon_{jkl}\, \ell_l$$

(Definiert **Lie-Algebra** der Gruppen SO(3) und SU(2))

Bestimme Eigenwerte von $\vec{\ell}$ und $\vec{\ell}^2$.

Algebraische Methode (vgl. harmonischer Oszillator)

$\rightsquigarrow$ nur die Vertauschungsregeln werden benutzt.

$\vec{\ell}^2$ und ℓ_3 können gleichzeitig diagonalisiert werden

$\rightsquigarrow$ es existieren Eigenzustände $|\lambda, m\rangle$ mit

$$\vec{\ell}^2 |\lambda, m\rangle = \lambda |\lambda, m\rangle$$

$$\ell_3 |\lambda, m\rangle = m |\lambda, m\rangle$$

Orthogonalität: $\langle \lambda', m' | \lambda, m\rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{mm'}$

λ ist nicht-negativ:

$$0 \le \| (\vec{\ell} |\lambda, m\rangle) \|^2 = \langle \lambda, m | \vec{\ell}^{\dagger} \vec{\ell} | \lambda, m\rangle$$

$$= \langle \lambda, m | \vec{\ell}^2 | \lambda, m\rangle = \lambda \underbrace{\langle \lambda, m | \lambda, m\rangle}_{=1}$$

selbst-adj.

☒

Definiere <u>Leiteroperatoren</u>

$$l_+ := l_1 + i l_2, \qquad l_- := l_1 - i l_2 \quad \Rightarrow \quad (l_+)^\dagger = l_-$$

Wichtige Kommutatoren und Beziehungen:

(a) $\quad [l_3, l_\pm] = \pm l_\pm$

(b) $\quad [l_+, l_-] = 2 l_3$

(c) $\quad \vec{l}^{\,2} = l_+ l_- + l_3^2 - l_3$

$\qquad\quad = l_- l_+ + l_3^2 + l_3$

(d) $\quad [\vec{l}^{\,2}, l_\pm] = 0$

$\pm i(-i) = \mp i^2 = \pm$

<u>Beweis:</u> (Übung ?)

(a) $\quad [l_3, l_\pm] = [l_3, l_1 \pm i l_2]$

$= [l_3, l_1] \pm i [l_3, l_2] = i l_2 \pm l_1$

$= \pm(l_1 \pm i l_2) = \pm l_\pm$

(b) $\quad [l_+, l_-] = [l_1 + i l_2, l_1 - i l_2]$

$= -i [l_1, l_2] + i [l_2, l_1] = -2i [l_1, l_2] = 2 l_3$

(c) $\quad \vec{l}^{\,2} = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = l_+ l_- - i l_2 l_1 + i l_1 l_2 + l_3^2$

$= l_+ l_- + i [l_1, l_2] + l_3^2$

$= l_+ l_- + l_3^2 - l_3$

$$\vec{l}^{\,2} = l_- l_+ - i[l_1, l_2] + l_3^2$$
$$= l_- l_+ + l_3^2 + l_3$$

(d) $[\vec{l}^{\,2}, l_\pm] = [\vec{l}^{\,2}, l_1] \pm i [\vec{l}^{\,2}, l_2] = 0$ ∎

Wirkung der Leiteroperatoren auf $|\lambda, m\rangle$:

$$\underbrace{[\vec{l}^{\,2}, l_\pm]}_{=0,\ \text{wg. (d)}} |\lambda, m\rangle \equiv \vec{l}^{\,2} l_\pm |\lambda, m\rangle - l_\pm \underbrace{\vec{l}^{\,2} |\lambda, m\rangle}_{=\lambda |\lambda, m\rangle}$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow \vec{l}^{\,2} \left(l_\pm |\lambda, m\rangle \right) = \lambda \left(l_\pm |\lambda, m\rangle \right)$$

↪ $l_\pm |\lambda, m\rangle$ und $|\lambda, m\rangle$ sind beide Eigenvektoren von $\vec{l}^{\,2}$ mit demselben Eigenwert λ.

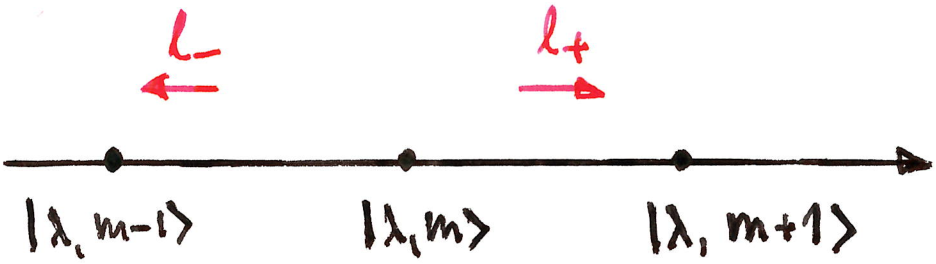
$$\underbrace{[l_3, l_\pm]}_{= \pm l_\pm} |\lambda, m\rangle \equiv l_3 l_\pm |\lambda, m\rangle - l_\pm \underbrace{l_3 |\lambda, m\rangle}_{= m |\lambda, m\rangle}$$
$$= \pm l_\pm |\lambda, m\rangle$$

$$\Rightarrow l_3 \left(l_\pm |\lambda, m\rangle \right) = m\, l_\pm |\lambda, m\rangle \pm l_\pm |\lambda, m\rangle$$
$$= (m \pm 1) \left(l_\pm |\lambda, m\rangle \right)$$

↪ $l_\pm |\lambda, m\rangle$ ist Eigenvektor von l_3 mit Eigenwert $(m \pm 1)$

$l_\pm$ verschiebt Eigenwerte von l_3 um ± 1;

$l_\pm$ sind Leiteroperatoren:



Betrachte $(\text{Norm})^2$ von $l_\pm |\lambda, m\rangle$:

$$\| (l_\pm |\lambda, m\rangle) \|^2 = \langle \lambda, m | l_\mp l_\pm | \lambda, m\rangle$$

$$\underset{(c)}{=} \langle \lambda, m | \vec{l}^{\,2} - l_3^2 \mp l_3 | \lambda, m\rangle$$

$$= \lambda - m^2 \mp m \geq 0 \Rightarrow m^2 \pm m \leq \lambda$$

$\rightsquigarrow$ $|m|(|m|+1) \leq \lambda$ (Einschränkung an Werte von m)

Annahme: $l \equiv m_{max}$ sei der größtmögliche Wert von m

Dann gilt $l_+ |\lambda, l\rangle = 0$, sonst wäre $l_+ |\lambda, l\rangle$ ein Eigenvektor von l_3 mit Eigenwert $l+1 > l \equiv m_{max}$ ↯

$$\| (l_+ |\lambda, l\rangle) \|^2 = \langle \lambda, l | l_- l_+ | \lambda, l\rangle$$

$$= \langle \lambda, l | \vec{l}^{\,2} - l_3^2 - l_3 | \lambda, l\rangle$$

$$= \lambda - l^2 - l \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = l(l+1)}$$

d.h. wir haben den Eigenwert von $\vec{l}^{\,2}$ durch den maximalen Eigenwert von l_3 ausgedrückt.

Betrachte nun m_{min}: $\qquad l_- |\lambda, m_{min}\rangle = 0$

$$\| (l_- |\lambda, m_{min}\rangle) \|^2 = \langle \lambda, m_{min} | l_+ l_- | \lambda, m_{min}\rangle$$

$$= \langle \lambda\, m_{min} | \vec{l}^{\,2} - l_3^2 + l_3 | \lambda, m_{min}\rangle$$

$$= \lambda - m_{min}^2 + m_{min} \overset{!}{=} 0$$

quadratic equation

$$\Rightarrow \quad \lambda = m_{min}^2 - m_{min} = l^2 + l$$

$$\Rightarrow m_{min} = \tfrac{1}{2} \pm (l + \tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \quad m_{max} \equiv l = - m_{min}$$

$\curvearrowright$ Die zulässigen Werte von m sind

$-l, -l+1, \ldots, l-1, l$

d.h. es gibt $(2l+1) = 1, 2, 3, \ldots$ mögliche Werte für m bei vorgegebenem l.

$(2l+1)$ ist die Zahl der Sprossen der Leiter

Muss m_{max} von m_{min} aus über eine endliche Zahl von Schritten erreichen können:

$$\lambda \equiv m_{max} = m_{min} + n = -m_{max} + n$$

$$\Rightarrow \quad 2\lambda = n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad l = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots$$

Zusammenfassung:

$$|\lambda, m\rangle \rightarrow |l, m\rangle \qquad (\text{Schreibe } l \text{ statt } \lambda)$$

$$\vec{l}^{\,2} \, |l, m\rangle = l(l+1) \, |l, m\rangle$$

$$l_3 \, |l, m\rangle = m \, |l, m\rangle \quad , \quad \text{wobei}$$

$$l \in \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \ldots\}$$

$$m \in \{-l, -l+1, \ldots, l-1, l\}$$

$$\vec{L}^{2} \, |l, m\rangle = l(l+1) \hbar^2 \, |l, m\rangle$$

$$L_3 \, |l, m\rangle = m \hbar \, |l, m\rangle$$

Bahndrehimpuls

Eigenwerte von $\vec{l}^{\,2}$ und l_3 folgen ausschließlich aus Vertauschungsregeln:

$$[l_i, l_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,l_k$$

Der Bahndrehimpuls erfüllt zusätzlich

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\cdot\vec{L} = \vec{p}\cdot\vec{L} = 0$$

Diese Beziehungen schränken das Eigenwertspektrum zusätzlich ein.

Satz: Die Eigenwerte des Bahndrehimpuls sind durch

$$\vec{L}^2\,|l,m\rangle = l(l+1)\,\hbar^2\,|l,m\rangle$$

$$L_3\,|l,m\rangle = m\hbar\,|l,m\rangle$$

mit $l \in \{0,1,2,3,\ldots\}$
$m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$

gegeben. Halbzahlige Bahndrehimpulse treten nicht auf!

Beweis: Idee: kann $\vec{x}, \vec{p}$ durch Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren aus $\longrightarrow$ Anzahloperatoren bilden ganzzahlige Eigenwerte

Hier: 3-dim. Problem

$$Q_i \equiv u_i := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x_i$$

$$P_i \equiv -i\frac{d}{du_i} := -i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\frac{d}{dx_i} \qquad i = 1,2,3$$

$$a_i := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_i + \frac{d}{dx_i}\right), \qquad a_i^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_i - \frac{d}{dx_i}\right)$$

$$a_+ := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1 + i a_2\right), \qquad a_+^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^\dagger - i a_2^\dagger\right)$$

$$a_- := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1 - i a_2\right), \qquad a_-^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^\dagger + i a_2^\dagger\right)$$

(1-dim. Fall: a_+, a_- haben kein Äquivalent)

- Kommutatoren:

(i) $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \mathbb{1}$

(ii) $[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$

(iii) $[a_\pm, a_\pm^\dagger] = \mathbb{1}$

(iv) $[a_\pm, a_\pm] = [a_\pm^\dagger, a_\pm^\dagger] = [a_\pm, a_\mp^\dagger] = [a_\pm, a_\mp] = 0$

- (i), (ii) : aus-x-en

(iii) : $[a_\pm, a_\pm^\dagger] = \frac{1}{2}[a_1 \pm i a_2, a_1^\dagger \mp i a_2^\dagger]$

$$= \frac{1}{2}\left\{[a_1, a_1^\dagger] \pm i \underbrace{\cancel{[a_2, a_1^\dagger]}}_{0} \mp i \underbrace{\cancel{[a_1, a_2^\dagger]}}_{0} + [a_2, a_2^\dagger]\right\}$$

$$\overset{(i),(ii)}{=} \frac{1}{2}\left\{\mathbb{1} + \mathbb{1}\right\} = \mathbb{1}$$

(iv) : wie (iii)

$$l_3 = \frac{1}{\hbar}(x_1 p_2 - x_2 p_1) \quad , \quad x_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, Q_i$$

$$p_i = \sqrt{m\omega\hbar}\, P_i$$

$$= (Q_1 P_2 - Q_2 P_1)$$

$$Q_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_i + a_i^+)$$

$$= -\frac{i}{2}\{(a_1 + a_1^+)(a_2 - a_2^+) - (a_2 + a_2^+)(a_1 - a_1^+)\}$$

$$P_i = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a_i - a_i^+)$$

$$= \frac{1}{2i}\{\underline{a_1 a_2} - a_1 a_2^+ + a_1^+ a_2 - \underline{a_1^+ a_2^+} - \underline{a_2 a_1} + a_2 a_1^+ - a_2^+ a_1 + \underline{a_2^+ a_1^+}\}$$

$$[a_1, a_2^+] = 0$$

$$a_1 a_2^+ = a_2^+ a_1$$

$$= \frac{1}{i}(a_1^+ a_2 - a_1 a_2^+)$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_+ + a_-)$$

$$a_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_- - a_+)$$

$$= \ldots =$$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{i}{2}\{a_-^+ a_- + a_- a_-^+ - a_+^+ a_+ - a_+ a_+^+\}$$

$$a_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_+^+ + a_-^+)$$

$$a_2^+ = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_+^+ - a_-^+)$$

$$\underset{(iii)}{=} \frac{1}{2}\{a_-^+ a_- \cancel{+1} + a_-^+ a_- - a_+^+ a_+ \cancel{-1} - a_+^+ a_+\}$$

$$= a_-^+ a_- - a_+^+ a_+$$

$$\therefore \quad l_3 = a_-^+ a_- - a_+^+ a_+ = n_- - n_+$$

$n_\pm$: Anzahloperatoren : ganzzahlige Eigenwerte

$\Rightarrow$ $n_- - n_+$ hat ganzzahlige Eigenwerte, somit auch l_3 ▨