3.8 Schrödinger- und Heisenberg-Bild

Schrödinger-Gln. beschreibt zeitliche Entwicklung quantenmechanischer Zustände:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle ; \qquad \langle \vec{x} | \alpha(t)\rangle = \psi_\alpha(\vec{x}, t)$$

Zeitliche Entwicklung des Zustandes $|\alpha(t_0)\rangle$ zu $|\alpha(t)\rangle$ im Intervall $[t_0, t]$ läßt sich als Abbildung interpretieren:

$$|\alpha(t_0)\rangle \to |\alpha(t)\rangle$$

$$|\alpha(t)\rangle = U(t, t_0) \, |\alpha(t_0)\rangle$$

Die Abbildung $U(t, t_0)$ heißt **Zeitentwicklungs-operator** und ist unitär.

Das sieht man wie folgt:

Betr.: $|\alpha(t)\rangle$, $|\beta(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \beta(t) | \alpha(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \, \psi_\beta^*(\vec{x}, t) \, \psi_\alpha(\vec{x}, t)$$

$$= i\hbar \int d^3x \left(\frac{\partial \psi_\beta^*}{\partial t} \psi_\alpha + \psi_\beta^* \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} \right)$$

$$= \int d^3x \left\{ \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_\beta\right)^* \psi_\alpha + \psi_\beta^* \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha \right) \right\}$$

$$= \int d^3x \left\{ (-H\psi_\beta)^* \psi_\alpha + \psi_\beta^* (H\psi_\alpha) \right\} = 0$$

H ist s.a.

$$\curvearrowright \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \beta(t) | \alpha(t) \rangle = 0 \iff \langle \beta(t) | \alpha(t) \rangle$$ zeitlich konstant bzw. Erhaltungsgröße

$$|\alpha(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\alpha(t_0)\rangle$$

$$\langle\alpha(t)| = \langle\alpha(t_0)|\,U(t,t_0)^\dagger$$ (analog für $|\beta\rangle$)

Also $$\langle \beta(t) | \alpha(t) \rangle = \langle \beta(t_0) |\, U(t,t_0)^\dagger\, U(t,t_0)\, | \alpha(t_0) \rangle$$

$$\stackrel{!}{=} \langle \beta(t_0) | \alpha(t_0) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad U(t,t_0)^\dagger\, U(t,t_0) = \mathbb{1}$$

Falls H zeitunabhängig, definiere $U(t,t_0)$ über

$$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H (t-t_0)}$$

Das führt auf

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\, e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}\, |\alpha(t_0)\rangle$$

$$= H\, e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}\, |\alpha(t_0)\rangle = H\,|\alpha(t)\rangle$$

was nichts anderes als die Schrödingergleichung ist.

Bedeutung von $U(t,t_0)$: Betrachte Spektraldarstellung:

$\{|n\rangle\}$: vollständiges Orthonormalsystem zu H

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad , \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$$

$$f(H) = \sum_n f(E_n)|n\rangle\langle n|$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)} |n\rangle\langle n|$$

Betrachte nun $\quad |\alpha(t_0)\rangle = \sum_n c_n(t_0)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Basisvektoren, zeitunabh.}}}{|n\rangle}$

$$\Rightarrow |\alpha(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\alpha(t_0)\rangle$$

$$= \sum_{m,n} e^{-\frac{i}{\hbar}E_m(t-t_0)} |m\rangle\underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{mn}} c_n(t_0)$$

$$= \sum_n \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)} c_n(t_0)}_{\equiv\, c_n(t)}|n\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_n |c_n(t)|^2 = \langle\alpha(t)|\alpha(t)\rangle = \langle\alpha(t_0)|\alpha(t_0)\rangle = \sum_n |c_n(t_0)|^2$$

$\curvearrowright$ Die Summe der Wahrscheinlichkeiten bleibt erhalten.

I. A. $\quad |c_n(t)| \neq |c_n(t_0)| \quad$ (Gleichheit nur wenn Op. diesen

Basis $\{|n\rangle\}$ betrachtet wird, mit H vertauscht).

Eigenschaften von $U(t,t_0)$

- $U(t_0+dt, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H\,dt} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H\,dt + O(dt^2)$

  $U(t_0+dt, t_0)^\dagger = \qquad = \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} H\,dt + O(dt^2)$

- Sei $\Delta t = t - t_0 \rightsquigarrow U(t,t_0) \equiv U(\Delta t)$

  Dann ist $U(\Delta t)^\dagger = U(-\Delta t)$

- $U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)\, U(t_1, t_0) \qquad t_2 > t_1 > t_0$

- $i\hbar \frac{d}{dt} U(t,t_0) = i\hbar \left(-\frac{i}{\hbar}\right) H\, e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$

  $= H\,U(t,t_0) = U(t,t_0)\,H$ (H vertauscht mit seiner Exponentialreihe

Bemerkung:

Falls H zeitabhängig ist, muss man unterscheiden

(a) H's zu verschiedenen Zeiten vertauschen:

$$U(t,t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right\}$$

(b) H's zu verschiedenen Zeiten vertauschen nicht: (z.B. richtungsabh. Magnetfeld)

$$U(t,t_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, H(t_1)\,H(t_2)\cdots H(t_n)$$

Dyson-Reihe

Schrödinger-Bild: Zeitentwicklungsoperator wirkt auf Zustandsvektoren

[Setze $t_0 = 0$ und schreibe $U(t)$ statt $U(t,t_0)$]

Observable wie $\hat{\vec{x}}$, $\hat{\vec{p}}$ sind zeitfixiert

Wende eine zeitabhängige, unitäre Transformation an:

$$|\alpha(t)\rangle \to |\alpha_H\rangle := U(t)^\dagger |\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(0)\rangle$$

$$A \to A_H(t) := U(t)^\dagger A\, U(t)$$

↳ Zeitabhängigkeit wird auf Observable übertragen

→ Heisenberg-Bild

$$|\alpha_H\rangle \equiv |\alpha_S(0)\rangle \xrightarrow{U} |\alpha_S(t)\rangle$$

$$A_H(t) \xleftarrow{U} A_H(0) \equiv A_S$$

d.h. bei $t=0$ werden Zustände und Observable in beiden Bildern identifiziert.

Heisenberg-Bild: Zustände sind zeitfixiert.

Matrixelemente in der Energiedarstellung

$$\langle m| A_H(t) |n\rangle = \langle m| U(t)^\dagger A\, U(t) |n\rangle$$

$$= \langle m| e^{iHt/\hbar} A\, e^{-iHt/\hbar} |n\rangle = e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \langle m|A|n\rangle$$

Die Erwartungswerte sind in beiden Bildern gleich:

$$\langle A\rangle_H = \langle \alpha_H | A_H(t) | \alpha_H \rangle$$

$$= \langle \alpha(t) | \underbrace{U(t)\; U(t)^\dagger}_{\mathbb{1}} A \underbrace{U(t)\, U(t)^\dagger}_{\mathbb{1}} | \alpha(t) \rangle = \langle A \rangle$$

Bewegungsgl. im Schrödinger-Bild: Schrödinger-Gleichung

Was ist die entsprechende Bew. gl. im Heisenberg-Bild?

– Im S.-Bild können Operatoren explizit zeitabhängig sein

$$A_S(t) = \hat{p} + k\hat{x} \sin\omega t$$

$$\Rightarrow A_H(t) = U(t)^\dagger A_S(t)\, U(t) = \hat{p}_H(t) + k\, \hat{x}_H(t) \sin\omega t$$

$$A_S(0) = A_H(0)$$

$$\frac{d}{dt} U(t)^\dagger = \frac{d}{dt} e^{iHt/\hbar} = \frac{i}{\hbar} H\, U(t)^\dagger$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = -H A_H(t) + i\hbar\, U(t)^\dagger \frac{\partial A_S}{\partial t} U(t) + A_H(t) H$$

$$= [A_H(t), H] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A_H(t)$$

wobei $\frac{\partial}{\partial t} A_H(t) := U(t)^\dagger \frac{\partial A_S(t)}{\partial t} U(t)$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{d}{dt} A_H(t) = \frac{\partial A_H(t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [H, A_H(t)]}$$

Hamilton Heisenberg

(siehe Abschnitt 1.6)