Inkompatible Observable und Unschärferelation

Unverträgliche Observable besitzen keine gemeinsame Basis von Eigenzuständen, und sind nicht gleichzeitig scharf messbar. Es gilt

$$[A, B] \neq 0$$

Nimmt man an, dass es eine gemeinsame Basis von Eigenzuständen gibt, so führt dies zwangsläufig auf

$$[A, B] = 0$$

in Widerspruch zur Voraussetzung dass A, B unverträglich sind.

Für unverträgliche Observable A, B gilt die verallgemeinerte Unschärferelation:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [A, B] \rangle \right|^2 \qquad (*)$$

bzw. $$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$

Test: Orts / Impuls - Unschärfe (1-dim.)

$$[x, p] = i\hbar \quad \Rightarrow \quad (\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2} \left| i\hbar \right| = \frac{\hbar}{2} \ \checkmark$$

Beweis von (*)

Definiere den Operator C durch $[A, B] =: iC$

Es gilt $C^+ = C$, denn

$$[A, B]^+ = B^+A^+ - A^+B^+ = BA - AB = -[A, B]$$

Definiere außerdem die Operatoren A' und B' durch

$$A' := A - \langle A \rangle , \qquad B' := B - \langle B \rangle$$

$$\begin{aligned} [A', B'] &= [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle] \\ &= [A, B] - [\langle A \rangle, B] - [A, \langle B \rangle] + \ldots \\ &= [A, B] = iC \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A'^2 \rangle$$

$$(\Delta B)^2 = \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle = \langle B'^2 \rangle$$

Betrachte nun die Funktion $F(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(\alpha) := \| (\alpha A' - iB')\psi \|^2 \geq 0$$

$$F(\alpha) = \left((\alpha A' - iB')\psi,\ (\alpha A' - iB')\psi \right)$$

$$= \left(\psi,\ (\alpha A' + iB')(\alpha A' - iB')\psi \right) = \ldots$$

$$= \left(\psi,\ (\alpha^2 A'^2 - i\alpha [A', B'] + B'^2)\psi \right)$$

$$= \alpha^2 \langle A'^2 \rangle + \alpha \langle C \rangle + \langle B'^2 \rangle$$

$$= \alpha^2 (\Delta A)^2 + \alpha \langle C \rangle + (\Delta B)^2$$

Nach Konstruktion ist $F(\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$, insbesondere auch für

$$\alpha = -\frac{\langle C \rangle}{2(\Delta A)^2}$$

Q: why not choose "5" instead of "2" in the denom.? Flo
A: this does not correspond to the minimum of $F(\alpha)$

und somit

$$\frac{\langle C \rangle^2}{4(\Delta A)^{\cancel{4}\,2}} \cancel{(\Delta A)^2} - \frac{\langle C \rangle^2}{2(\Delta A)^2} + (\Delta B)^2 \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\Delta B)^2 \geq \frac{\langle C \rangle^2}{4(\Delta A)^2} \qquad \text{Faktor } 2?$$

$$\therefore \quad \boxed{(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{|\langle C \rangle|}{2} = \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|}$$

(alternativer Beweis findet sich bei Sakurai)

Postulate der Quantenmechanik

I. Reine Zustände eines quantenmechanischen Systems werden durch normierte Vektoren, bzw. Strahlen $|\hat{\alpha}\rangle$ eines komplexen Hilbertraums $\mathscr{H}$ beschrieben.

Superpositionsprinzip: Für physikalische Zustände $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ ist auch $a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle$, mit $a, b \in \mathbb{C}$ wieder ein physikalischer Zustand. Jeder Vektor entspricht daher einem möglichen, reinen Zustand.

II. Den Observablen entsprechen selbstadjungierte, lineare Operatoren. Die möglichen Messwerte sind Eigenwerte des Operators.

III. Der Erwartungswert der Observablen A im Zustand $|\alpha\rangle$ zum vorgegebenen Zeitpunkt t ist gegeben durch $\langle A\rangle = \langle\alpha|A|\alpha\rangle$

IV. Die zeitliche Entwicklung eines Zustands wird durch die Schrödingergleichung bestimmt:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle = H|\alpha\rangle \qquad (H: \text{ Hamilton-Operator})$$

Postulate der Quantenmechanik (Fortsetzung)

V. Wird an einem System im Zustand $|\hat{\alpha}\rangle$ die Observable A gemessen und dabei der Messwert λ_n gefunden, so geht das System bei der Messung in den zu λ_n gehörigen Eigenzustand $|n\rangle$ über:

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |n\rangle, \qquad A|n\rangle = \lambda_n|n\rangle$$

Bemerkungen:

1. Als reinen Zustand bezeichnet man ein Ensemble von identisch präparierten Zuständen. Man erhält den Erwartungswert einer Observablen nach einer (unendlich) großen Zahl von Messungen an identisch präparierten Systemen.

2. Als Strahl bezeichnet man eine Äquivalenzklasse von Vektoren, die zueinander proportional sind:

$$|\hat{\alpha}\rangle = \left\{ |\beta\rangle \,\middle|\, |\beta\rangle \sim |\alpha\rangle \right\}, \qquad |\alpha\rangle \sim |\beta\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha\rangle = \lambda\,|\beta\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

3. Selbstadjungierte Operatoren haben reelle Eigenwerte.

4. Der Erwartungswert einer Observablen A im Zustand $|\alpha\rangle$ ist i.A. nicht gleich einem der Eigenwerte von A. Dies gilt nur dann, wenn $|\alpha\rangle$ gleich einem der Eigenzustände $|n\rangle$ ist.

3.6 Kontinuierliches Spektrum

Motivation: Betrachtungen zu Teilchen im endlichen Potenzialtopf (Abschnitt 2.2) ergaben ein gemischtes Spektrum:

$E < 0$: diskrete Energieeigenwerte (gebundene Zustände)

$E > 0$: kontinuierliches Spektrum (Streuzustände)

Streuzustände werden durch ebene Wellen beschrieben

Ebene Wellen: nicht normierbar
keine Elemente des Hilbertraums

Warum betrachten wir dann ebene Wellen?

- Basis für beliebige Wellenfunktionen
- Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen sind erfüllt (nur eben Normierbarkeit nicht ...)

Impulsoperator:

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad , \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{(selbst-adjungiert)}$$

$$\psi(x) \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \quad \text{(1-dim. Fall hier)}$$

Eigenwertgleichung: $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = p\,\psi(x)$

Lösung: $u_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$

(Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist Konvention; andere Normierung ändert nichts am physikalischen Inhalt).

$$\|u_k\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u_k^*(x)\, u_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, 1 = \infty$$

Also ist $u_k \notin \mathcal{H}$, daher kein Eigenvektor

$u_k(x)$ heißt uneigentlicher Eigenvektor

$p = \hbar k$ " " Eigenwert

Das kontinuierliche Spektrum ist die Menge der uneigentlichen Eigenwerte.

Ebene Wellen erfüllen jedoch (Kontinuums-) Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsbeziehungen:

$$(u_k, u_l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i(k-l)x} = \delta(k-l)$$

(Dirac'sche δ-Fktn.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, u_k(x)\, u_k^*(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ik(y-x)} = \delta(y-x)$$

[Diskretes Spektrum: $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}$

$$\sum_n \phi_n^*(x)\, \phi_n(y) = \delta(x-y)$$
]

Bracket - notation:

$$|k\rangle \doteq u_k(x) \qquad , \qquad |k\rangle \notin \mathcal{H}$$

$$\langle k | l \rangle = (u_k, u_l) = \delta(k-l) \qquad \text{Orthogonalität}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \; |k\rangle\langle k| = \mathbb{1} \qquad \text{Vollständigkeit}$$

Letzteres wird leicht plausibel durch

$$|k'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk \; \delta(k-k') \, |k\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk \; \langle k | k' \rangle \, |k\rangle = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} dk \; |k\rangle\langle k| \right)}_{\equiv \mathbb{1}} |k'\rangle \, .$$

Ortsoperator:

Multiplikationsoperator:

$$\hat{x} \, \psi(x) = x \, \psi(x)$$

[N.B. Diese Beziehung gilt auch dann wenn $\psi(x)$ kein Eigenvektor von $\hat{x}$ ist].

Betrachte nun: Eigenwert ξ, Eigenfunktion $\psi_\xi(x)$

↷ Eigenwertgleichung: $\hat{x} \, \psi_\xi(x) = \xi \, \psi_\xi(x)$

$\Rightarrow \quad (x-\xi)\,\psi_\xi(x) = 0$, daher $\psi_\xi(x) = 0$

für $\xi \neq x$

(d.h. $\psi_\xi(x) = 0$ für $x \neq \xi$ unterscheidet EF $\psi_\xi(x)$

von einer beliebigen Fkt. $\psi(x)$ für die $\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$)

$\psi_\xi(x)$ kann keine Funktion im üblichen Sinn sein;

ist auch kein Vektor im Hilbertraum.

$$\underline{\psi_\xi(x) = \delta(x-\xi)}$$

Dirac-Notation: $\quad |\xi\rangle \doteq \psi_\xi(x)$

$$\| \xi \|^2 = \langle \xi | \xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_\xi^*(x)\, \psi_\xi(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-\xi)\,\delta(x-\xi) = \delta(0) = \infty$$

$$\Rightarrow \quad |\xi\rangle \doteq \psi_\xi(x) \notin \mathcal{H}$$

$|\xi\rangle$ ist uneigentlicher EV

ξ " " EW

Spektrum von $\hat{x}$ ist **kontinuierlich** und besteht aus $\mathbb{R}$.

Orthonormalität & Vollständigkeit:

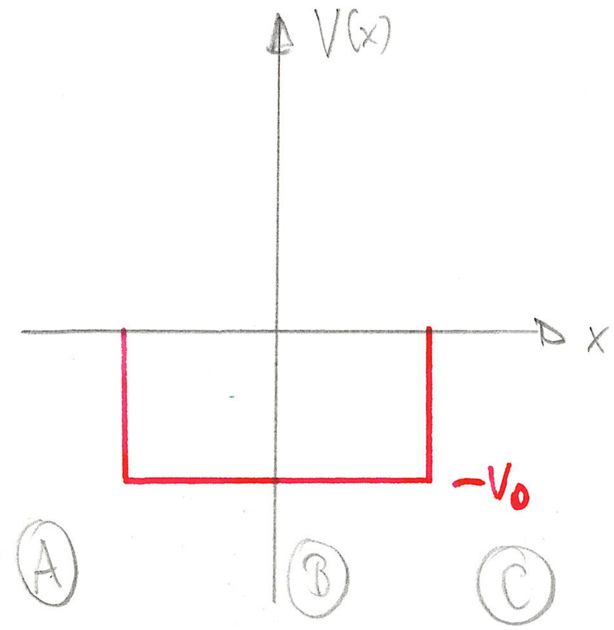
$$\langle \xi | \xi' \rangle \equiv (\psi_\xi, \psi_{\xi'}) = \int dx \; \delta(x-\xi)\,\delta(x-\xi') = \delta(\xi-\xi')$$

$$|\xi'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; \delta(\xi-\xi')\,|\xi\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; \langle \xi | \xi' \rangle |\xi\rangle = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; |\xi\rangle\langle\xi|\right)}_{\equiv \mathbb{1}} |\xi'\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; |\xi\rangle\langle\xi| = \mathbb{1} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; \psi_\xi(x)\,\psi_\xi^*(y) = \delta(y-x)$$

Endlicher Potenzialtopf



$E < 0$: diskretes Spektrum

$E_0 < E_1 < \dots < E_N$

$|0\rangle, |1\rangle, \dots |N\rangle \in \mathcal{H}$

(endlich viele Zustände – grafische Lösung; # Zustände hängt von Wahl d. Parameter ab)

$\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$