Übungsblatt 9

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Wintersemester 2020/21

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig Oberassistent: Alexander Segner

Abgabe: Mittwoch, 12.01.2022, 12:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Heisenbergsche Unschärferelation*

   (a) (2 Punkte) Gegeben seien zwei Operatoren A und B, für die gilt, dass $[A, B] = c \in \mathbb{C}$. Weiterhin sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Berechnen Sie die Unschärferelation für A und $f(B)$.
   Hinweis: Verallgemeinern Sie das Ergebnis von Aufgabe 1 (e) von Blatt 2.

   (b) (1 Punkt) Beweisen Sie die Unschärferelation

   $$\Delta x \cdot \Delta H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p \rangle|.$$

   Was sagt Ihnen diese Relation für stationäre Zustände?

2. *Neutrinooszillation*

   Das Standardmodell der Teilchenphysik kennt drei Neutrinoarten: Das Elektron-Neutrino (ν_e), das Myon-Neutrino (ν_μ) und das Tau-Neutrino (ν_τ). Experimentell ist bekannt, dass es Mischungen (Oszillation) zwischen diesen drei Neutrinoarten gibt. Nehmen Sie an, dass die Neutrinozustände $|\nu_e\rangle$ und $|\nu_\mu\rangle$ durch Mischungen der Energieeigenzustände $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ und $|\psi_3\rangle$ in der folgenden Form beschrieben werden:

   $$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \frac{1}{2} |\psi_1\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}} |\psi_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= \frac{3}{4} |\psi_1\rangle - \sqrt{\frac{3}{16}} |\psi_2\rangle - \frac{1}{2} |\psi_3\rangle \,. \end{aligned}$$

   Die Zustände $|\psi_i\rangle$ seien orthonormierte Energieeigenzustände zu den Energien $E_i = m_i c^2$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\psi(0)\rangle = |\nu_e\rangle$.

   (a) (2 Punkte) Berechnen Sie zu einem Zeitpunkt $t > 0$ die Wahrscheinlichkeit P_{ν_μ}, das Neutrino im Zustand $|\nu_\mu\rangle$ zu finden.

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit ist das Betragsquadrat der Übergangsamplitude

$$P_{\nu_\mu} = |\langle \nu_\mu | \psi(t) \rangle|^2.$$

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie zu einem Zeitpunkt $t > 0$ die Wahrscheinlichkeit P_{ν_τ}, das Neutrino im Zustand $|\nu_\tau\rangle$ zu finden.
Hinweis: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, das Teilchen in einem der drei Neutrinozustände zu finden, muss 1 sein.

(c) (1 Punkt) Was passiert im Grenzfall gleicher Massen m_i?

3. *Der Dichteoperator*

Gegeben sei eine Menge $\{|\psi_i\rangle \,|i \in \mathbb{N}\}$ von linear unabhängigen und normierten (aber nicht notwendigerweise orthogonalen) Zuständen und eine Menge $\left\{ p_i \in [0,1] \middle| \sum_i p_i = 1 \right\}$. Wir definieren einen Operator

$$\rho = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \, .$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}(\rho) = 1$ und $\mathrm{Sp}(\rho^2) \leq 1$ wobei die Spur Sp definiert ist wie in Aufgabe 2 auf Blatt 7.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}(\rho^2) = 1$ genau dann gilt, wenn ein Zustand $|\psi\rangle$ existiert, sodass $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Zeitabhängigkeit von ρ im Schrödingerbild durch die *von-Neumann-Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_S = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho_S]$$

beschrieben wird.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass im Heisenbergbild

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_H = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho_H]$$

gilt.

4. (3 Punkte) *Heisenbergbild*

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator im Schrödingerbild

$$H = \hbar\omega\left(a_S^\dagger a_S + \frac{1}{2}\right)$$

mit $[a_S, a_S^\dagger] = 1$. Nutzen Sie das Hadamard-Lemma

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}[X,[X,Y]] + \frac{1}{3!}[X,[X,[X,Y]]] + \cdots$$

um zu zeigen, dass die Leiteroperatoren $a_H^\dagger$ und a_H im Heisenbergbild mit den Leiteroperatoren im Schrödingerbild über folgende Beziehung zusammenhängen:

$$\begin{aligned} a_H(t) =& e^{-i\omega t} a_S \\ a_H^\dagger(t) =& e^{i\omega t} a_S^\dagger \end{aligned}$$