Übungsblatt 11
zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Wintersemester 2020/21

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig Oberassistent: Alexander Segner

Abgabe: Freitag, 28.01.2022, 12:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Kugelsymmetrisches Kastenpotential*

   Es sei das Potential
   $$V(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ V_0 & r > r_0 \end{cases}$$
   gegeben. Für $r < r_0$ wird der Radialanteil $R(r)$ der Wellenfunktion wird durch die Gleichung
   $$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}u(r) = Eu(r)$$
   beschrieben, wobei $u(r) = rR(r)$.

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für $\rho = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}r$ und $v(\rho) = u\left(\frac{\hbar\rho}{\sqrt{2mE}}\right)$ die Gleichung
   $$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1\right)v(\rho) = 0$$
   gilt und lösen Sie diese für $l = 0$.

   (b) (2 Punkte) Substituieren Sie nun $v(\rho) =: \sqrt{\rho}z(\rho)$ und zeigen Sie, dass z die Besselsche Differenzialgleichung
   $$\rho^2 z'' + \rho z' + \left[\rho^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right] z = 0 \tag{1}$$
   erfüllt.

   (c) (4 Punkte) Gleichung (1) wird durch die *Besselfunktionen 1. Art*
   $$z(\rho) = J_{l+\frac{1}{2}}(\rho) = \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}}j_l(\rho)$$
   gelöst. Damit gilt $v(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\rho j_l(\rho)$ und $\tilde{R}(\rho) = R\left(\frac{\hbar\rho}{\sqrt{2mE}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}j_l(\rho)$, wobei
   $$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)^l \frac{\sin\rho}{\rho}.$$

Bestimmen Sie $j_l(\rho)$ für $l \in \{0, 1, 2\}$ und diskutieren Sie das Verhalten dieser Lösungen bei $\rho = 0$.

2. *Das Wasserstoffatom*

Der Grundzustand des Wasserstoffatoms ist gegeben durch

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{2}{\sqrt{a_B^3}} e^{-\frac{r}{a_B}} Y_{00}(\theta, \phi).$$

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Erwartungswerte von r, r^2, p_r und p_r^2 in diesem Zustand, wobei

$$p_r \psi = -i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\psi).$$

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Unschärfen Δr und Δp_r und vergleichen Sie diese mit der Unschärferelation.