Übungsblatt 10

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Wintersemester 2020/21

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig　　Oberassistent: Alexander Segner

Abgabe: Mittwoch, 19.01.2022, 12:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Die Pauli-Matrizen*

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen

   $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   die Relation $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ efüllen und $\frac{\sigma_i}{2}$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ die Lie-Algebra der SU(2) aufspannen, d.h.

   $$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}.$$

   (b) (3 Punkte) Berechnen Sie zu einem Vektor $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}^3$ die Matrix $M = \exp(i\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma})$ und zeigen Sie explizit, dass $M \in \mathrm{SU}(2)$.
   Hinweis: Die Exponentialfunktion kann über ihre Reihendarstellung $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *auf Matrizen verallgemeinert werden.*

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich jede hermitesche 2×2-Matrix als

   $$H = \alpha\mathbb{1} + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \delta\sigma_3$$

   mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben lässt und jede Matrix von dieser Form hermitesch ist.

2. *Drehimpuls in Kugelkoordinaten*

   Im folgenden seien die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) definiert durch

   $$\begin{aligned} x =& r \sin\theta \cos\phi \\ y =& r \sin\theta \sin\phi \\ z =& r \cos\theta. \end{aligned}$$

(a) (3 Punkte) Drücken Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ in Kugelkoordinaten aus.
Hinweis: Sie können diese Aufgabe lösen, indem Sie die Jacobi-Matrix J der obigen Transformation aufstellen und diese invertieren. Sie erhalten dann

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = J^{-1}(r,\theta,\phi) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}.$$

Alternativ können Sie die Ableitungen von der Umkehrtransformation

$$\begin{aligned} r =& \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta =& \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi =& \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x > 0 \\ \operatorname{sgn}(y)\frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ausgehend mithilfe der mehrdimensionalen Kettenregel herleiten.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} L_\pm =& L_x \pm i L_y = \hbar e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ L_z =& -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}$$

und Berechnen Sie den Kommutator $[L_+, L_-]$ in Kugelkoordinaten.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbf{L}^2 = L_+L_- - \hbar L_z + L_z^2$ und geben Sie $\mathbf{L}^2$ in Kugelkoordinaten an.

3. *Kugelflächenfunktionen*

Für Zentralpotentiale $V(\mathbf{r}) = V(r)$ sind die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta,\phi)$ Lösungen des winkelabhängigen Teils der Schrödingergleichung. Die Kugelflächenfunktionen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta,\phi) =& \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \\ \text{mit } P_l^m(x) =& \frac{(-1)^m}{2^l l!}\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l. \end{aligned}$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für die Parität der Kugelflächenfunktionen

$$\Pi Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

gilt, wobei die Wirkung des Paritätsoperators durch

$$\Pi Y_{lm}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\pi - \theta, \phi + \pi)$$

gegeben ist.

(b) (1 Punkt) Für Zustände mit $m = 0$ lassen sich die Kugelflächenfunktionen durch die Legendre-Polynome $P_l(\cos\theta) = P_l^0(\cos\theta)$ ausdrücken:

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta).$$

Berechnen Sie Y_{l0} für $0 \leq l \leq 2$.

(c) (2 Punkte) Die Kugelflächenfunktionen mit $0 < m \leq l$ können mithilfe des Aufsteigeoperators L_+ (vgl. Aufgabe 2 (b)) erzeugt werden. Berechnen Sie mithilfe der Beziehung

$$L_+ Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_{l,m+1}$$

und der Symmetrierelation

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi)$$

die Kugelflächenfunktionen mit $0 < |m| \leq l$ für $0 < l \leq 2$.

(d) (2 Punkte) In Aufgabe 3 auf Blatt 6 haben Sie die Energie- und Drehimpulseigenfunktionen des dreidimensionalen harmonischen Oszillators betrachtet. In Aufgabenteil (e) haben Sie gemeinsame Eigenfunktionen $\Phi_i(\mathbf{u})$, $i \in \{1, 2, 3\}$ von E, $\mathbf{L}^2$ und L_3 zum Energieeigenwert $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ bestimmt:

$$\Phi_{1/2}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(\mathbf{u}) \pm i\psi_2(\mathbf{u})), \quad \Phi_3(\mathbf{u}) = \psi_3(\mathbf{u})$$

Dabei waren die Energieeigenfunktionen ψ_i definiert durch

$$\psi_i(\mathbf{u}) = a_i^\dagger \phi_1(u_1)\phi_2(u_2)\phi_2(u_2),$$

wobei

$$\phi_i(u_i) = \pi^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{u_i^2}{2}}$$

die Grundzustandswellenfunktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist sind. Berechnen Sie die drei Funktionen $\psi_i(\mathbf{u})$ und zeigen Sie, dass die Funktionen $\Phi_i(\mathbf{u})$ in Kugelkoordinaten durch

$$\Phi_i(\mathbf{u}) = (\pm)\sqrt{\frac{8}{3}} \pi^{\frac{5}{4}} \cdot r e^{-\frac{r^2}{2}} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

mit $l = 1$ und $m \in \{0, \pm 1\}$ gegeben sind.