Übungsblatt 8

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Wintersemester 2020/21

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig   Oberassistent: Alexander Segner

Abgabe: Mittwoch, 5.1.2022, 12:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Der Paritätsoperator*

   Der Paritätsoperator Π ist definiert durch

   $$\Pi\psi(\mathbf{x}) = \psi(-\mathbf{x}).$$

   (a) (1 Punkt) Berechnen Sie die möglichen Eigenwerte von Π.
   Hinweis: Betrachten Sie Π^2.

   (b) (2 Punkte) Gegeben sei ein symmetrisches Potential $V(\mathbf{x}) = V(-\mathbf{x})$. Zeigen Sie, dass Π mit dem zugehörigen Hamiltonoperator H vertauscht.

   (c) (1 Punkt) Was bedeutet diese Aussage für Eigenfunktionen des Hamiltonoperators?

2. *Laguerre-Polynome*

   Die Laguerre-Polynome sind orthogonale Polynome, die die Differentialgleichung

   $$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0 \tag{1}$$

   lösen.

   (a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) durch die *Rodrigues-Formel*

   $$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x^n e^{-x}\right]$$

   gelöst wird.
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(xf(x)) - n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}f(x)$ *und wenden Sie dies auf* $f(x) = x^k e^{-x}$ *an, um den Ausdruck für* $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x)$ *zu vereinfachen.*

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

   $$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\langle L_m, L_n \rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, L_m(x) L_n(x) e^{-x} = \delta_{mn}.$$

Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung für die Fälle $n > m$, $n < m$ und $n = m$.

(d) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$g : (-1, 1) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x, t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{tx}{1-t}}$$

die Laguerre-Polynome erzeugt, d.h.

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n. \tag{2}$$

Hinweis: Drücken Sie $\frac{1}{(1-t)^{k+1}}$ durch Ableitungen der geometrischen Reihe aus.

(e) (3 Punkte) Leiten Sie Gleichung (2) nach t ab, um eine Rekursionsformel für die Laguerre-Polynome herzuleiten, die L_{n+1} durch L_n und L_{n-1} ausdrückt.

3. *Das Superpositionsprinzip*

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich ein Teilchen in einem Potential $V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ im Zustand

$$\psi(x, 0) = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \psi_n(x),$$

wobei ψ_n die normierten Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators mit den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega\big(n + \frac{1}{2}\big)$ sind.

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Normierungskonstante A.

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie $\psi(x, t) = e^{-iHt/\hbar}\psi(x, 0)$.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x, t)|^2$ eine periodische Funktion ist und geben Sie die Periode τ an.

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie bei $t = 0$.