1.) Die Eigenwerte λ sind nicht-negativ, $\lambda \geq 0$, denn

$$\lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\lambda|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\lambda^* a^+ a \phi_\lambda \, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (a\phi_\lambda)^* (a\phi_\lambda) \, du = \int_{-\infty}^{\infty} |a\phi_\lambda|^2 du \geq 0$$

2.) Ist λ E.W., so auch $\lambda+1$ mit E.F $a^+\phi_\lambda$:

$$(a^+a)(a^+\phi_\lambda) = a^+(aa^+)\phi_\lambda \overset{[a,a^+]=1}{=} a^+(1+a^+a)\phi_\lambda$$

$$= a^+(1+\lambda)\phi_\lambda = (\lambda+1)(a^+\phi_\lambda)$$

Dabei darf $a^+\phi_\lambda$ nicht verschwinden

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a^+\phi_\lambda|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} (a^+\phi_\lambda)^*(a^+\phi_\lambda) \, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\lambda^* \, aa^+ \phi_\lambda \, du = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\lambda^* (1+a^+a)\phi_\lambda$$

$$= (\lambda+1) \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\lambda|^2 du = \lambda+1 \geq 1$$

Ist λ E.W. so auch $(\lambda-1)$ mit E.F. $a\phi_\lambda$, sofern $\lambda-1 \geq 0$:

$$(a^+a)(a\phi_\lambda) = (aa^+-1)a\phi_\lambda = a(a^+a-1)\phi_\lambda$$

$$= a(\lambda-1)\phi_\lambda = (\lambda-1)(a\phi_\lambda)$$

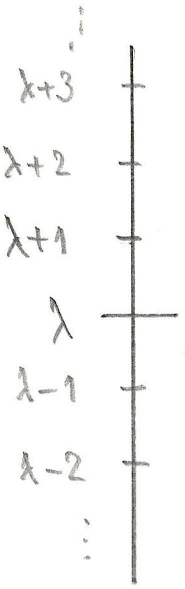
Dabei darf $a\phi_\lambda$ nicht verschwinden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a\phi_\lambda|^2 \, du = \int_{-\infty}^{\infty} (a\phi_\lambda)^* (a\phi_\lambda) \, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\lambda^* \, a^+ a \phi_\lambda \, du = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\lambda|^2 \, du = \lambda \geq 1,$$

da $\lambda - 1$ nur E.W. sein kann wenn $\lambda - 1 \geq 0$

Die wiederholte Anwendung von a^+ und a erzeugt <u>Folgen</u> von Eigenwerten:



a, a^+ heißen <u>Leiteroperatoren</u>

a^+ : Aufsteigeoperator / Erzeugungsoperator

a : Absteigeoperator / Vernichtungsoperator

3. Die Eigenwerte λ sind <u>ganzzahlig</u> und nicht-negativ, d.h. $\lambda \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

<u>Beweis:</u> Für $\lambda \geq 0$ muss die Folge $\lambda - 1, \lambda - 2, \dots$ nach endlich vielen Schritten notwendigerweise abbrechen.

$$\phi_{\lambda-n} := (a)^n \phi_\lambda \Rightarrow (a^+a)\,\phi_{\lambda-n} = (\lambda-n)\,\phi_{\lambda-n}$$

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ so dass $(\lambda-n) \geq 0$ aber $(\lambda-n-1) < 0$.

Dann gilt $a\phi_{\lambda-n} \equiv 0$, denn sonst wäre

$(a^+a)(a\phi_{\lambda-n}) = (\lambda-n-1)(a\phi_{\lambda-n})$ im Widerspruch zur Eigenschaft dass alle Eigenwerte nicht-negativ sind.

4.] $\lambda=0$ ist einfacher Eigenwert

Sei $a\phi_0 = 0$, dann ist auch $(a^+a)\,\phi_0 = 0$ und $\lambda=0$ ist EW. Gibt es nicht-triviales ϕ_0?

$$a\phi_0 = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u + \frac{d}{du}\right)\phi_0(u) = 0$$

$$u\,\phi_0 = -\frac{d\phi_0}{du} \Rightarrow d\ln\phi_0 = -u\,du$$

$$\Rightarrow \ln\phi_0(u) = -\tfrac{1}{2}u^2 + C, \quad \phi_0(u) = A\,e^{-u^2/2}$$

Normiere ϕ_0:

$$1 = A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = 2A^2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \cancel{2}A^2\sqrt{\pi}\,\frac{1}{\cancel{2}}$$

$$= A^2\sqrt{\pi} \qquad \Rightarrow A = \pi^{-1/4}$$

Berechne Integral mit der Γ-Funktion ...

Γ - Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty dt \; e^{-t} \, t^{x-1}$$

$$\Gamma(1) = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad (t \to z^2 \; ; \text{ Gauß'sches Integral})$$

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

Für $x \in \mathbb{N}$ ist $\Gamma(x) = (x-1)!$

Also ist

$$\boxed{\phi_0(u) = \pi^{-1/4}\, e^{-u^2/2}}$$

die normierte Eigenfunktion zum kleinsten EW. $\lambda = 0$.

Als Ergebnis erhalten wir das Spektrum von a^+a:

$$(a^+a)\,\phi_n = n\,\phi_n \;, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Mit $H = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$ kennen wir dann auch das Spektrum von H:

$$H\,\phi_n = E_n\,\phi_n \;, \quad E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}) \;, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$, ...

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ist die Nullpunktsenergie

Der harmonische Oszillator in der Q.M. ist niemals vollständig in Ruhe

Alle Eigenwerte sind äquidistant : $E_{i+1} - E_i = \hbar\omega$

$i = 0, 1, \ldots$

Wie sehen die Eigenfunktionen aus?

Grundzustand : $\phi_0(u) = \pi^{-1/4} e^{-u^2/2}$,

$$u = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x = \frac{x}{b} \,, \quad b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{b^{1/2}\,\pi^{1/4}}\, e^{-x^2/(2b^2)}$$

wg. Normierung

Die höheren Zustände entstehen durch wiederholte Anwendung von a^+ :

$$\phi_n(u) = \text{const}\; \underbrace{a^+ a^+ \ldots a^+}_{n\text{-mal}}\, \phi_0(u)$$

Insbesondere gilt:

$$\Rightarrow \quad a^+ \phi_n = c\, \phi_{n+1}$$

d.h. ϕ_{n+1} ist proportional zu $a^+\phi_n$ (*) bis auf Normierungskonst. c

Seien ϕ_n, ϕ_{n+1} bereits auf 1 normiert. Dann bestimmt man die Konstante c wie folgt:

$$(*) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} du\, (a^+\phi_n)^* (a^+\phi_n) = |c|^2 \int_{-\infty}^{\infty} du\, |\phi_{n+1}|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\, \phi_n^*\, a a^+ \phi_n = \int du\, \phi_n^* (1 + a^+ a)\, \phi_n$$

$$= (n+1) \underbrace{\int du\, |\phi_n|^2}_{= 1 \text{ n.V.}} = (n+1)$$

Da ϕ_{n+1} auch normiert ist, gilt $|c|^2 = n+1$

oder $c = \sqrt{n+1}$

Daher gilt

$$\phi_{n+1}(u) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, a^+ \phi_n(u)$$

und somit:

$$\phi_1(u) = a^+ \phi_0$$

$$\phi_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a^+ \phi_1(u)$$

$$\phi_3(u) = \frac{1}{\sqrt{3}}\, a^+ \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} (a^+)^2 \phi_1$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(u) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \phi_0(u)$$

Explizit:

$$\phi_n(u) = \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n e^{-u^2/2}$$

$$= \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(u - \frac{d}{du}\right) \right)^n e^{-u^2/2}$$

Ableitung wirkt nicht außerhalb von [...]

$$= \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}} \left[\left(u - \frac{d}{du}\right)^n e^{-u^2/2} \right] e^{u^2/2}\, e^{-u^2/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}}} \underbrace{e^{u^2/2} \left[\left(u - \frac{d}{du}\right)^n e^{-u^2/2} \right]}_{\equiv H_n(u)} e^{-u^2/2}$$

Die Funktionen

$$H_n(u) := e^{u^2/2} \left(u - \frac{d}{du}\right)^n e^{-u^2/2} \quad , \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

heißen <u>HERMITE-Polynome</u>

Die ersten Hermite Polynome sind

$$H_0(u) = e^{u^2/2}\, e^{-u^2/2} = 1$$

$$H_1(u) = e^{u^2/2} \left(u - \frac{d}{du}\right) e^{-u^2/2} = e^{u^2/2} \big(u - (-u)\big) e^{u^2/2} = 2u$$

$$H_2(u) = \ldots = 4u^2 - 2 \quad , \quad H_3(u) = 8u^3 - 12u$$

$$H_4(u) = 16u^4 - 48u^2 + 12 \quad , \ldots$$