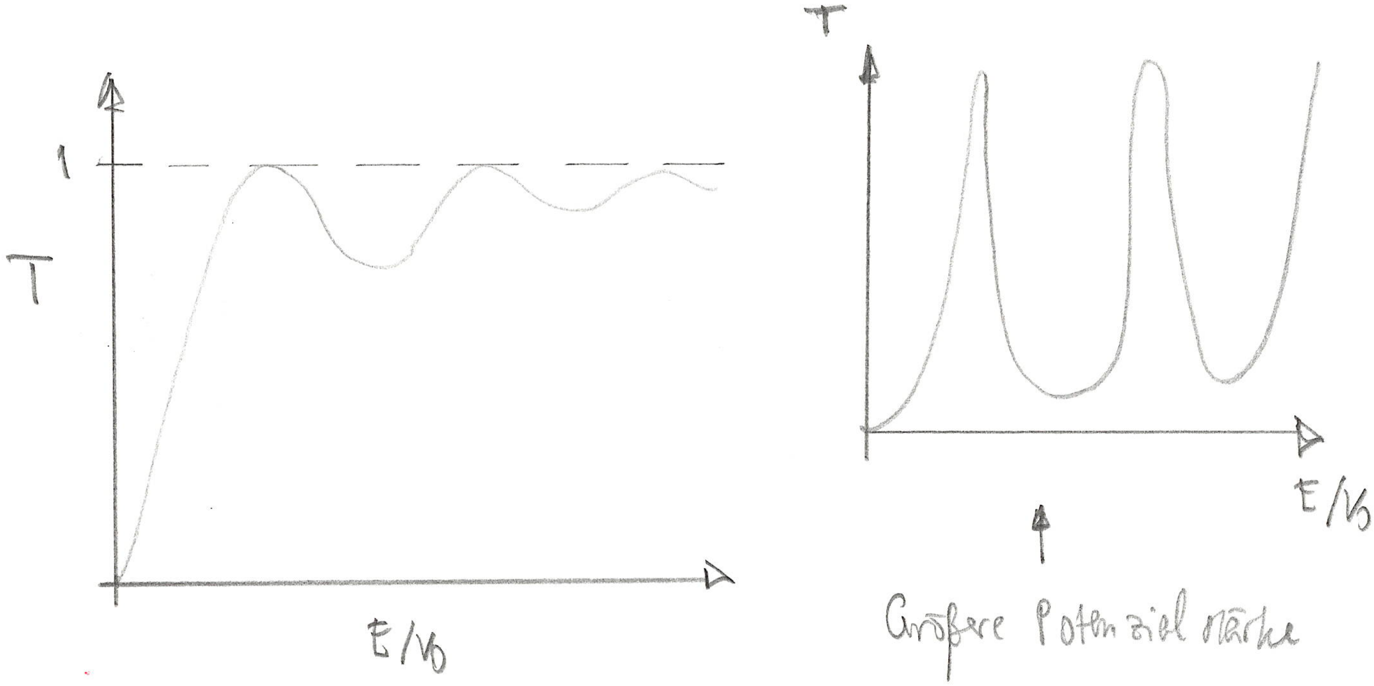
Resonanz entsteht durch destruktive Interferenz der bei $x = \frac{L}{2}$ und $x = -\frac{L}{2}$ reflektierten Wellen,

wenn $2kL = n\pi$



Betrachte Verhalten von $\gamma_+ = \gamma_+(E)$ in der Nähe von $E = E_R$:

Aus den Stetigkeitsbedingungen folgt:

$$\left(\gamma_+ e^{ik_0L}\right)^{-1} = \cos kL - i\,\frac{\varepsilon_+}{2}\sin kL \equiv f(E)$$

Taylorentwicklung von $f(E)$ um Resonanzstelle

$$f(E) = f(E_R) + \left.\frac{\partial f}{\partial E}\right|_{E=E_R}(E-E_R) + \dots$$

$$E = E_R \quad \Longleftrightarrow \quad k = k_R = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \cos(k_R L) = \cos(n\pi) = (-)^n \; ; \quad \sin(k_R L) = 0$$

$$\frac{df}{dE}\bigg|_{E=E_R} = \frac{\partial f}{\partial k}\;\frac{dk}{dE}\bigg|_{E=E_R}$$

$$= \left\{\left[-L\,\underset{0,\ k=k_R}{\sin(kL)} - \frac{i}{2}\left(\frac{d\varepsilon_+}{dk}\right)\underset{0,\ k=k_R}{\sin(kL)} - \frac{iL}{2}\varepsilon_+\underbrace{\cos(kL)}_{(-)^n}\right]\frac{dk}{dE}\right\}_{E=E_R}$$

$$= -iL\,\frac{(-)^n}{2}\left[\varepsilon_+\frac{dk}{dE}\right]_{E=E_R} \quad , \; k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)}$$

$$k_0=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$= -iL\,\frac{(-)^n}{2}\left[\left(\frac{k}{k_0}+\frac{k_0}{k}\right)\frac{1}{\hbar}\left(\frac{m}{2(E+V_0)}\right)^{1/2}\right]_{E=E_R}$$

$$= -iL\,\frac{(-)^n}{2\hbar}\,\frac{m^{1/2}}{\sqrt{2}}\left[\frac{2E+V_0}{\sqrt{E}\,\sqrt{E+V_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{E+V_0}}\right]_{E=E_R}$$

→ Taylorentwicklung:

$$f(E) = (-)^n\left\{1 - i\,\frac{L}{\hbar}\,\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}\,\frac{2E_R+V_0}{\sqrt{E_R}\,(E_R+V_0)}\,(E-E_R)\right\}+\dots$$

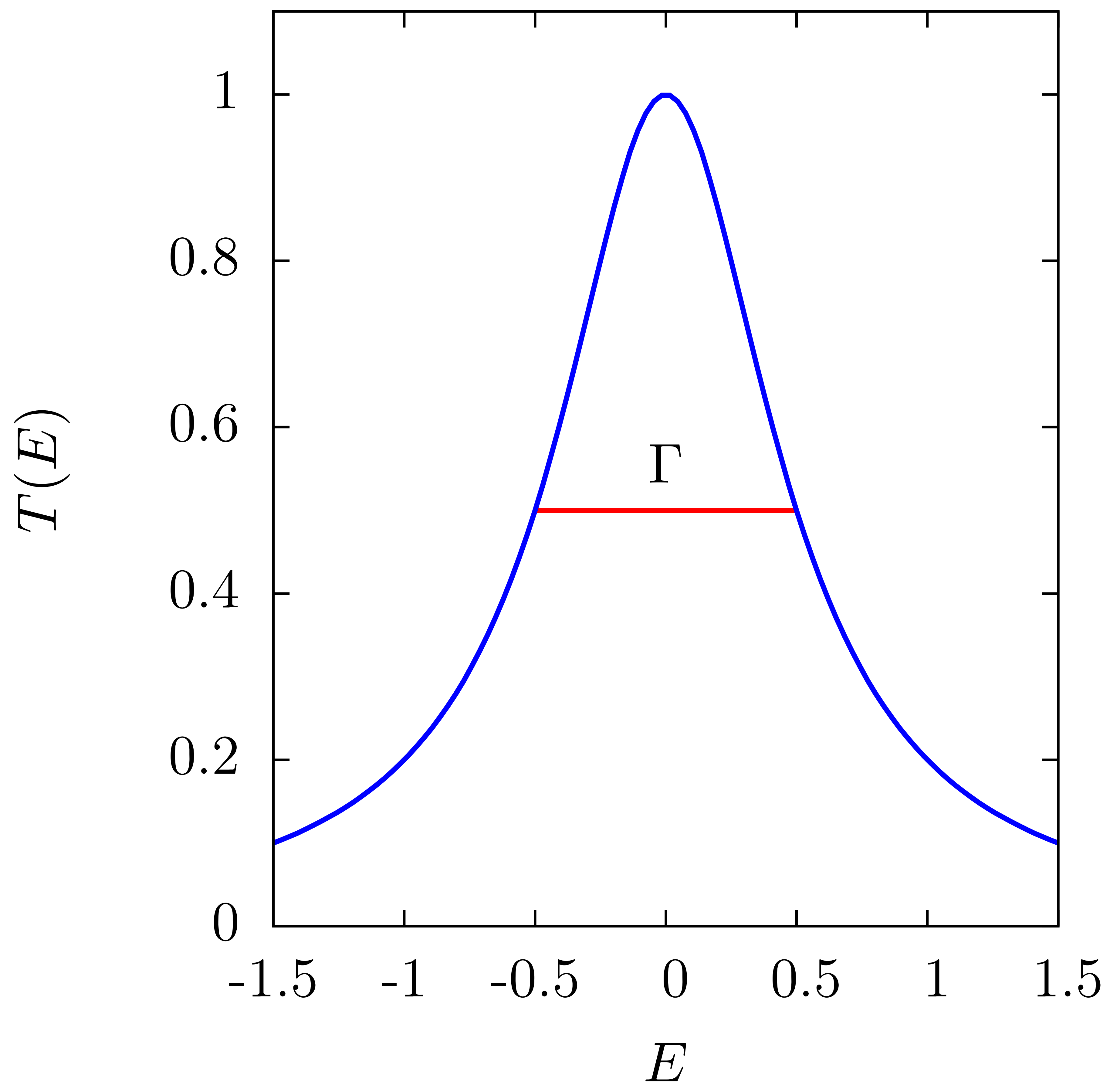
$$\equiv (-)^n\left\{1 - i\,\frac{2}{\Gamma}(E-E_R)\right\}+\dots$$

$$= \left(\gamma_+(E)\,e^{ik_0L}\right)^{-1}$$

mit

$$\Gamma = \frac{4\sqrt{2}\,\hbar\,\sqrt{E_R}\,(E_R+V_0)}{\sqrt{m}\,L\,(2E_R+V_0)}$$

Resonanzen — Breit-Wigner Kurve



$$\gamma_+(E)\,e^{ik_0L} \simeq (-)^n \frac{i\,(\Gamma/2)}{(\Gamma/2)^2 + (E-E_R)^2},$$

$$\Gamma = \frac{4\sqrt{2}\,\hbar\,\sqrt{E_R}\,(E_R+V_0)}{\sqrt{m}\,L\,(2E_R+V_0)}$$

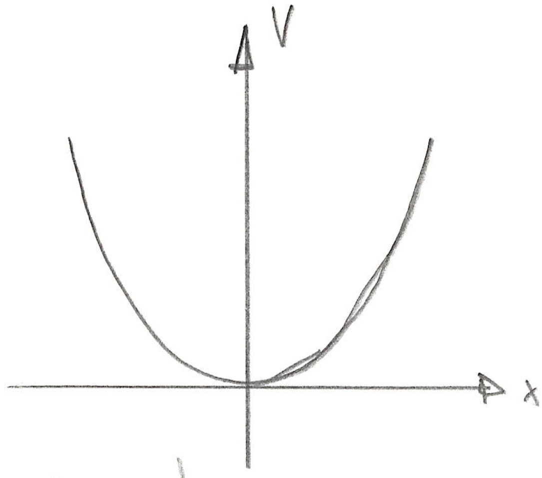
$$T(E) = |\gamma_+|^2 = \frac{(\Gamma/2)^2}{(\Gamma/2)^2 + (E-E_R)^2}$$

Lorentz-Kurve; Breit-Wigner Funktion

2.3 Harmonischer Oszillator

Oszillatorpotenzial : (1-dim.)

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$



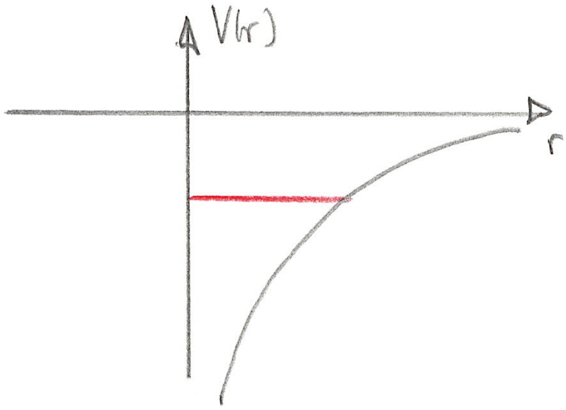
Alle Zustände sind gebunden

Vollständig diskretes Spektrum

(ähnlich wie beim unendlichen Potenzialtopf)

$\longleftrightarrow$ Coulomb - Potenzial :

$$V(r) = - \frac{\alpha}{r}$$



Gebundene Zustände können existieren ($E < 0$ muss gelten)

→ vollständig diskretes Spektrum (H-Atom)

$E > 0$: kontinuierliches Spektrum

↳ Gemischtes Spektrum – besteht aus diskretem und kontinuierlichen Anteil.

Harmonischer Oszillator:

- lineare Kraft: $F = -kx$ – lineares System
- viele physikalische Systeme durch harmonischen Oszillator beschreibbar: Photon des e.m. Feldes,

Atome im Kristallgitter

– exakt lösbares System!

Hamilton-Operator des eindim. harmonischen Oszillators:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Schrödinger-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Energieeigenwert}}}{E}\psi(x)$$

Anstatt die Schrödinger-Gl. als DGL zu lösen, werden wir die Energieeigenwert algebraisch bestimmen.

Hierzu ist es nützlich eine Variablentransformation vorzunehmen

$$u := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \Rightarrow \frac{d}{du} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\frac{d}{dx}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dx^2} = \frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2}{du^2}, \quad x^2 = \frac{\hbar}{m\omega}u^2$$

$$[u] = \left(\frac{M \cdot T^{-1}}{ML^2T^{-1}}\right)^{1/2} L = 1 \quad \text{— dimensionslos!}$$

$$\Rightarrow \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\hbar}{m\omega}u^2$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega\left(-\frac{d^2}{du^2} + u^2\right) \qquad (*)$$

$$\equiv \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2\right)$$

mit $\hat{P} = -i\frac{d}{du}$, $\hat{Q} = u = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$

Mit der Standardmethode prüft man nach daß

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = -i$$

$$\Big\ulcorner\ [\hat{P}, \hat{Q}]\,\phi(u) = -i\frac{d}{du}(u\phi) + u\,i\frac{d\phi}{du}$$

$$= -i\phi - iu\frac{d\phi}{du} + ui\frac{d\phi}{du} = -i\,\phi(u) \quad \lrcorner$$

Definiere außerdem die Operatoren

$$a^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u - \frac{d}{du}\right)$$

$$a := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u + \frac{d}{du}\right)$$

Weder a^+ noch a sind selbstadjungiert, denn $\frac{d}{du}$ ist es nicht, nur $P = -i\frac{d}{du}$ ist es

Wie sich aufgrund der Schreibweise schon vermuten läßt ist a^+ zu a adjungiert und umgekehrt, denn

- $$\int_{-\infty}^{\infty} du \; \varphi^*(u)\, u\, \varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} du \; (u\varphi)^* \varphi \qquad (u \text{ ist reell})$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} du \; \varphi^*(u) \frac{d}{du} \varphi(u) = \underbrace{\varphi^* \varphi \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0,\ \text{wg. Normierbarkeit}} - \int_{-\infty}^{\infty} du \; \frac{d\varphi^*}{du} \varphi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} du \left(- \frac{d\varphi}{du} \right)^* \varphi$$

↷ $-\frac{d}{du}$ ist adjungiert zu $\frac{d}{du}$, daher sind auch $\left(u + \frac{d}{du}\right)$ und $\left(u - \frac{d}{du}\right)$ zueinander adjungiert.

Drücke den Hamilton-Operator durch a, a^+ aus.

Betrachte

$$(a^+ a)\, \phi(u) = \frac{1}{2} \left[\left(u - \frac{d}{du}\right) \left(u + \frac{d}{du}\right) \right] \phi(u)$$

$$= \frac{1}{2} \left[u^2 \phi - \frac{d}{du}(u\phi) + u \frac{d\phi}{du} - \frac{d^2 \phi}{du^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[u^2 - 1 - \frac{d^2}{du^2} \right] \phi(u) = \frac{1}{2} \left(- \frac{d^2}{du^2} + u^2 \right) - \frac{1}{2}$$

(*) implies $H = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(-\frac{d^2}{du^2} + u^2\right)$

$$\therefore \quad \boxed{a^+a = \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2} \iff H = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)}$$

→ Eigenfunktionen von a^+a sind ebenfalls Eigenfunktionen von H. Es genügt daher die Eigenfunktionen und -werte von a^+a zu bestimmen.

Zunächst berechnen wir noch die Kommutatoren

$$[a, a^+] = \frac{1}{2}[Q + iP, Q - iP]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-i[Q,P] + i[P,Q]\right\} = i\underbrace{[P,Q]}_{=-i} = 1$$

Außerdem: $[a, a] = [a^+, a^+] = 0.$

Bestimme Eigenfunktionen und -werte in mehreren Schritten:

Sei $\phi_\lambda(u)$ eine Eigenfunktion von a^+a mit Eigenwert λ:

$$a^+a\,\phi_\lambda(u) = \lambda\,\phi_\lambda(u)$$

Dann zeigt man das folgende: