Lösungen:

$$\psi_A(x) = \alpha_+ e^{ik_0x} + \alpha_- e^{-ik_0x}$$

$$\psi_B(x) = \beta_+ e^{ikx} + \beta_- e^{-ikx}$$

$$\psi_C(x) = \gamma_+ e^{ik_0x} + \gamma_- e^{-ik_0x}$$

↝ Oszillatorisches Verhalten in A – C, d.h. Linearkombinationen von ebenen Wellen

↝ Die Lösungen sind <u>nicht</u> normierbar; Normierbare Lösungen müssen als Wellenpaket konstruiert werden. Wellenpakete sind <u>keine</u> stationären Lösungen; insbesondere haben sie eine nicht-verschwindende Energieunschärfe

Ignoriere dieses Problem zunächst. Lösungen der stationären Schr. Gl. heißen <u>Streuzustände</u>

Stetigkeitsbedingungen:

$$\psi_A\left(-\tfrac{L}{2}\right) = \psi_B\left(-\tfrac{L}{2}\right): \quad \alpha_+ e^{-ik_0\frac{L}{2}} + \alpha_- e^{ik_0\frac{L}{2}} = \beta_+ e^{-ik\frac{L}{2}} + \beta_- e^{ik\frac{L}{2}}$$

$$\psi_A'\left(-\tfrac{L}{2}\right) = \psi_B'\left(-\tfrac{L}{2}\right): \quad ik_0\left(\alpha_+ e^{-ik_0\frac{L}{2}} - \alpha_- e^{ik_0\frac{L}{2}}\right) = ik\left(\beta_+ e^{-ik\frac{L}{2}} - \beta_- e^{ik\frac{L}{2}}\right)$$

Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{-ik_0\frac{L}{2}} & e^{ik_0\frac{L}{2}} \\ e^{-ik_0\frac{L}{2}} & -e^{ik_0\frac{L}{2}} \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{N}} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik\frac{L}{2}} & e^{ik\frac{L}{2}} \\ \frac{k}{k_0} e^{-ik\frac{L}{2}} & -\frac{k}{k_0} e^{ik\frac{L}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_+ \\ \beta_- \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{N}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{ik_0\frac{L}{2}} & e^{ik_0\frac{L}{2}} \\ e^{-ik_0\frac{L}{2}} & -e^{-ik_0\frac{L}{2}} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ multipliziere beide Seiten mit N^{-1}

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1+\frac{k}{k_0}\right) e^{i(k_0-k)\frac{L}{2}} & \left(1-\frac{k}{k_0}\right) e^{i(k_0+k)\frac{L}{2}} \\ \left(1-\frac{k}{k_0}\right) e^{-i(k_0+k)\frac{L}{2}} & \left(1+\frac{k}{k_0}\right) e^{-i(k_0-k)\frac{L}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_+ \\ \beta_- \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\sim}{M}\left(k_0, k, -\frac{L}{2}\right) \begin{pmatrix} \beta_+ \\ \beta_- \end{pmatrix}$$

Jetzt dasselbe bei $x = L/2$:

$$-\frac{L}{2} \rightarrow \frac{L}{2}, \quad k_0 \leftrightarrow k, \quad \begin{matrix} \alpha_\pm \rightarrow \beta_\pm \\ \beta_\pm \rightarrow \gamma_\pm \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_+ \\ \beta_- \end{pmatrix} = \underset{\sim}{M}\left(k, k_0, \frac{L}{2}\right) \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ \gamma_- \end{pmatrix}$$

Damit wird der Zusammenhang zwischen $\alpha_\pm$ und $\gamma_\pm$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = \underset{\sim}{M}\left(k_0, k, -\frac{L}{2}\right) \underset{\sim}{M}\left(k, k_0, \frac{L}{2}\right) \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ \gamma_- \end{pmatrix}$$

Multiplikation der beiden Matrizen ergibt

$$"11" = \frac{1}{4}\left\{\left(2+\frac{k}{k_0}+\frac{k_0}{k}\right)e^{i(k_0-k)L} + \left(2-\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)e^{i(k_0+k)L}\right\}$$

Definiere: $\varepsilon_+ = \frac{k}{k_0} + \frac{k_0}{k}$, $\varepsilon_- = \frac{k}{k_0} - \frac{k_0}{k}$

$$"11" = e^{ik_0L}\,\frac{1}{4}\left\{(2+\varepsilon_+)e^{-ikL} + (2-\varepsilon_+)e^{ikL}\right\}$$

$$= e^{ik_0L}\left\{\cos kL - \frac{\varepsilon_+}{2}\,i\sin kL\right\}$$

$$"12" = \frac{1}{4}\left\{\left(1+\frac{k}{k_0}\right)\left(1-\frac{k_0}{k}\right)e^{-ikL} + \left(1-\frac{k}{k_0}\right)\left(1+\frac{k_0}{k}\right)e^{ikL}\right\}$$

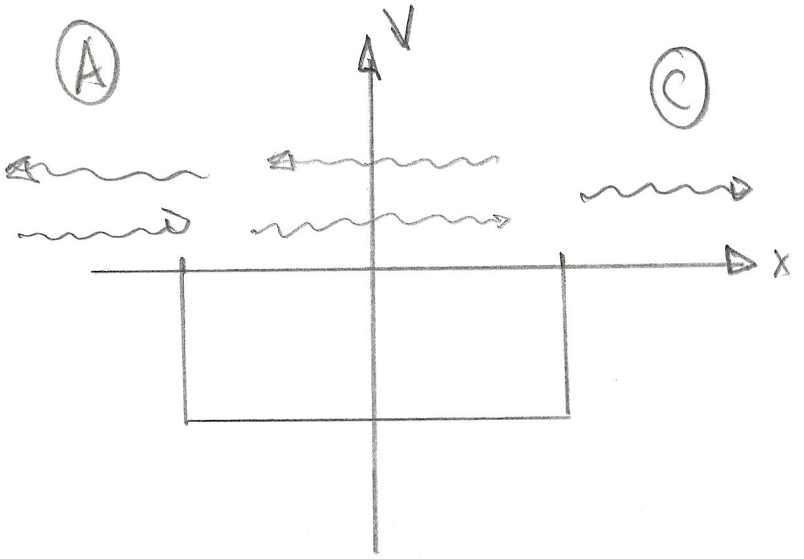
$$= \frac{1}{4}\left\{\varepsilon_-\,e^{-ikL} + \varepsilon_-\,e^{ikL}\right\}$$

$$= -\frac{i}{2}\,\varepsilon_-\sin kL$$

analog: "21" , "22"

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_0L}\left(\cos kL - i\frac{\varepsilon_+}{2}\sin kL\right) & -\frac{i}{2}\varepsilon_-\sin kL \\ \frac{i}{2}\varepsilon_-\sin kL & e^{-ik_0L}\left(\cos kL + i\frac{\varepsilon_+}{2}\sin kL\right)\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}\gamma_+\\ \gamma_-\end{pmatrix} \qquad (*)$$



OBdA: Ⓒ: nur auslaufende Welle: $\gamma_- \equiv 0$

Ⓐ, Ⓑ: ein- und auslaufende Welle;

setze $\alpha_+ \equiv 1$

↪ Amplituden der ebenen Wellen normiert auf die einlaufende Welle in Ⓐ

Grund: Problem ist symmetrisch um $x=0$

Falls $\psi_C = \gamma_+ e^{ik_0x} + \gamma_- e^{-ik_0x}$ Lösung, so auch

$\psi_C' = \alpha_+ e^{-ik_0x} + \alpha_- e^{ik_0x}$ und ebenfalls

$$\alpha_+ \psi_C - \gamma_- \psi_C' = (\alpha_+ \gamma_+ - \alpha_- \gamma_-) e^{ik_0x}$$

Lösungen:

$$\psi_A(x) = e^{ik_0x} + \alpha_- e^{-ik_0x}$$

$$\psi_B(x) = \beta_+ e^{ikx} + \beta_- e^{-ikx}$$

$$\psi_C(x) = \gamma_+ e^{ik_0x}$$

Setze $\alpha_+ = 1$, $\gamma_- = 0$ ein in **(*)**

$$\Rightarrow \quad 1 = e^{ik_0L}\left(\cos kL - i\,\frac{\varepsilon_+}{2}\sin kL\right)\gamma_+ \qquad (1)$$

$$\alpha_- = i\,\frac{\varepsilon_-}{2}\sin(kL)\,\gamma_+ \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \quad \gamma_+ = e^{-ik_0L}\,\frac{\cos kL + i\,\frac{\varepsilon_+}{2}\sin kL}{\cos^2 kL + \frac{\varepsilon_+^2}{4}\sin^2 kL}$$

$$= e^{-ik_0L}\,\frac{\cos kL + i\,\frac{\varepsilon_+}{2}\sin kL}{1 + \frac{\varepsilon_-^2}{4}\sin^2 kL}$$

$$\left(\frac{\varepsilon_+^2}{4} = \frac{\varepsilon_-^2}{4} + 1\right)$$

Bedeutung der Koeffizienten γ_+ und α_-:

Berechne die Stromdichte der Wahrscheinlichkeit in Gebieten A – C:

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\psi' - \psi\,\psi^{*\prime}\right)$$

(A): <u>einlaufende</u> Welle: $\psi_{A,in} = 1 \cdot e^{ik_0x}$

$$\Rightarrow \quad j_{in} = \frac{\hbar}{2mi}\left(e^{-ik_0x}\, ik_0\, e^{ik_0} - e^{ik_0x}(-ik_0)\,e^{-ik_0x}\right)$$

$$= \frac{\hbar k_0}{m}$$

<u>reflektierte</u> Welle: $\psi_{A,ref} = \alpha_- e^{-ik_0x}$

$$\Rightarrow j_{ref} = \frac{\hbar}{2mi}\Big(\alpha_-^* e^{ik_0x}\,\alpha_-(-ik_0)e^{-ik_0x} - \alpha_- e^{-ik_0x}\,\alpha_-^*(ik_0)e^{ik_0x}\Big)$$

$$= -|\alpha_-|^2\frac{\hbar}{2mi}\,2ik_0 = -|\alpha_-|^2\frac{\hbar k_0}{m}$$

Ⓒ: <u>transmittierte</u> Welle: $\psi_{C,tr} = \gamma_+ e^{ik_0x}$

$$j_{tr} = |\gamma_+|^2\frac{\hbar k_0}{m}$$

Die Wahrscheinlichkeiten für Reflexion + Transmission sind durch die <u>Verhältnisse</u> der entsprechenden Stromdichten:

<u>Transmissionskoeffizient</u>: $T = \left|\frac{j_{tr}}{j_{in}}\right| = |\gamma_+|^2$

<u>Reflexionskoeffizient</u>: $R = \left|\frac{j_{ref}}{j_{in}}\right| = |\alpha_-|^2$

(Alle Stromdichte proportional zu $\frac{\hbar k_0}{m}$ $\rightarrow$ fällt heraus).

Da die einlaufende Welle in Ⓐ auf 1 normiert ist, muss gelten:

$$1 = T + R = |\gamma_+|^2 + |\alpha_-|^2$$

In der Tat findet man mit den expliziten Ausdrücken für α_-, γ_+:

$$|\gamma_+|^2 + |\alpha_-|^2 = \frac{1}{4}\,\varepsilon_-^2 \sin^2(kL)\,|\gamma_+|^2 + |\gamma_+|^2$$

$$= |\gamma_+|^2 \left(1 + \frac{1}{4}\,\varepsilon_-^2 \sin^2 kL\right)$$

$$= \frac{\cancel{\cos^2 kL + \frac{\varepsilon_+^2}{4}} \sin^2 kL}{\left(\cancel{1 + \frac{1}{4}\,\varepsilon_-^2} \sin^2 kL\right)^{\cancel{2}}} \cancel{\left(1 + \frac{1}{4}\,\varepsilon_-^2 \sin^2 kL\right)}$$

$\varepsilon_-^2 + 4$

$$= 1, \qquad \text{da} \quad \cos^2 kL + \frac{\varepsilon_+^2}{4} \sin^2 kL = 1 + \frac{\varepsilon_-^2}{4} \sin^2 kL$$

Dasselbe Resultat kann man formell für jeden Streuzustand herleiten:

Kontinuitätsgleichung: $\dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$, da $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\Longrightarrow$ $j = \text{const}$ (Stromerhaltung)

(A): $\psi_A = \psi_{in} + \psi_{ref}$, $\psi_{in} = e^{ik_0x}$, $\psi_{ref} = \alpha_-\, e^{-ik_0x}$

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\left\{ \psi_{in}^* \psi_{in}' + \psi_{ref}^* \psi_{ref}' - \psi_{in} \psi_{in}^{*\prime} - \psi_{ref} \psi_{ref}^{*\prime} \right\}$$

Gemischte Terme:

$$\psi_{in}^* \psi_{ref}' - \psi_{ref} \psi_{in}^{*\prime} = 0$$

$$\psi_{ref}^* \psi_{in}' - \psi_{in} \psi_{ref}^{*\prime} = 0$$

$$\Rightarrow \quad j = j_{in} + j_{ref}$$

(C): $\quad j = j_{tr}$

Da $\frac{\partial j}{\partial x} = 0$, $j = \text{const}$ ist der Strom erhalten und es gilt

$$\boxed{j_{in} + j_{ref} = j_{tr}}$$

$$\Rightarrow \quad j_{in} = j_{tr} - j_{ref} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{j_{tr}}{j_{in}} - \frac{j_{ref}}{j_{in}}$$

$$= \left|\frac{j_{tr}}{j_{in}}\right| + \left|\frac{j_{ref}}{j_{in}}\right|$$

Transmissionskoeffizient:

$$T = |\gamma_+|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_-^2}{4} \sin^2 kL}$$

$$\varepsilon_-^2 = \left(\frac{k}{k_0} - \frac{k_0}{k}\right)^2, \quad k = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$= \left(\frac{k^2}{k_0^2} + \frac{k_0^2}{k^2} - 2\right) \quad (= \varepsilon_+^2 - 4)$$

$$= \frac{E+V_0}{E} + \frac{E}{E+V_0} - 2 = \frac{V_0^2}{E(E+V_0)} = \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{1}{1 + V_0/E}$$

$T = T(E)$

$E/V_0 \to 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad T(E) \to 0$

$E/V_0 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad T(E) \to 1$

$0 \leq T(E) \leq 1 \quad$ mit $\quad \lim\limits_{E/V_0 \to \infty} T(E) = 1$

$\curvearrowright$ energiereiche Teilchen werden durch Potenzial kaum beeinflusst

$\rightarrow$ Transmission erreicht 100 %

Aber: Für $kL = n\pi$ ist $\sin(kL) = 0$, daher

$T(E) = 1$

$\rightarrow$ $T(E)$ hat Maxima $(T(E) = 1)$ für $E < \infty$

$$k = \frac{n\pi}{L} = \sqrt{\frac{2m(E_R + V_0)}{\hbar^2}}$$

E_R: Wert der Energie für $kL = n\pi$

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{2m(E_R + V_0)}{\hbar^2}$$

$$\curvearrowright \quad E_R = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} n^2 - V_0$$

$\rightarrow$ Solche Zustände heißen <u>Resonanzen</u>