Übungsblatt 7

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Wintersemester 2020/21

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig   Oberassistent: Alexander Segner

Abgabe: Mittwoch, 15.12.2021, 12:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Harmonischer Oszillator*

   Gegeben sei der Hamiltonoperator

   $$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$$

   (a) (3 Punkte) Nutzen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation, um eine untere Grenze für die minimal zulässige Energie des Systems zu bestimmen.

   Hinweis: Betrachten Sie nur den Erwartungswert der Energie im Grundzustand. Die Wellenfunktion des Grundzustandes im Orts- bzw. Impulsraum sind symmetrische Funktionen von x bzw. p.

   (b) (2 Punkte) Die Wellenfunktion des Grundzustands lautet

   $$\psi_0(x) = \left(\frac{\mu\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2}.$$

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen außerhalb der klassischen Zone befindet.

2. *Spurrelationen*

   Es sei $B_N = \{|n\rangle : n \in N\}$ eine vollständige Orthonormalbasis eines Hilbertraums. Für einen Operator A, der in diesem Hilbertraum wirkt, ist die Spur von A bezüglich B_N definiert als

   $$\mathrm{Sp}_N(A) := \sum_{n \in N} \langle n|A|n\rangle .$$

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Spur Basisunabhängig ist, d.h. für zwei Basen B_N und B_M gilt

   $$\mathrm{Sp}_M(A) = \mathrm{Sp}_N(A).$$

   Dank dieses Fakts ist es nicht nötig, eine konkrete Basis zu kennzeichnen. Von daher schreiben wir im Folgenden statt $\mathrm{Sp}_N(A)$ nur noch $\mathrm{Sp}(A)$.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie für zwei Operatoren A, B, dass

   $$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA).$$

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Spur zyklisch ist, d.h. für Operatoren $A_1, A_2, ..., A_n$, $n > 2$ gilt

$$\mathrm{Sp}(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n) = \mathrm{Sp}(A_n A_1 A_2 \cdots A_{n-2} A_{n-1}).$$

(d) (1 Punkt) Es sei $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ mit $\sum_n |c_n|^2 = 1$. Dieser Zustand definiert einen *Dichteoperator* $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert eines Operators A bezüglich des Zustands $|\Psi\rangle$ gegeben ist durch

$$\langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A | \Psi \rangle = \mathrm{Sp}(\rho A).$$

3. *Der Matrixformalismus* (2 Punkte)

Mit der Braket-Notation lassen sich die Komponenten der Matrixdarstellung $\mathcal{O}$ zu einem Operator O schreiben als $\mathcal{O}_{mn} = \langle m|O|n\rangle$. Auf Blatt 6 haben Sie gezeigt, dass für den harmonischen Oszillator die Relation $[\mathcal{X}, \mathcal{P}] = i\hbar\mathbb{1}$ gilt. Zeigen Sie nun allgemein, dass für Matrixdarstellungen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ von Operatoren A, B, C mit $[A, B] = C$ gilt:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{C}$$

4. *Eigenfunktionen des Ortsoperators*

Gegeben sei der Ortsoperator x und der Impulsoperator p in einer Dimension.

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Kommutator

$$\left[x, \exp\left(i\frac{pa}{\hbar}\right)\right].$$

Hinweis: Nutzen Sie die Kommutatorrelationen von Blatt 2.

(b) (2 Punkte) Der Ortsoperator x erfülle die Eigenwertgleichung

$$x\,|x'\rangle = x'\,|x'\rangle$$

mit dem Eigenwert x'. Zeigen Sie, dass auch $\exp\left(i\frac{pa}{\hbar}\right)|x'\rangle$ ein Eigenzustand von x ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

(c) (3 Punkte) Sei $f(x)$ eine Funktion, die sich als Potenzreihe schreiben lässt, d.h. $f(x) = \sum_n c_n x^n$. Zeigen Sie, dass

$$\exp\left(i\frac{pa}{\hbar}\right) f(x) \exp\left(-i\frac{pa}{\hbar}\right) = f(x+a).$$

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst für $f(x) = x^n$ per vollständiger Induktion. Sie dürfen dabei voraussetzen, dass $\exp\left(i\frac{pa}{\hbar}\right)\exp\left(-i\frac{pa}{\hbar}\right) = 1$.